欧姆社学习漫画

漫画线性代数

〔日〕高桥　信/著
〔日〕Inoue Iroha/漫画绘制
〔日〕株式会社TREND-PRO/漫画制作
滕永红/译



科学出版社
www.sciencep.com

KindleDX出版署

✿前　言✿

本书是供读者快速学习线性代数课程的书籍。主要面向以下读者。

● 今后要学习线性代数课程的大学生

● 虽然现在正在学习线性代数，却完全不明白它的主要内容，正担心得不到高分升不了级的大学生

● 觉得现在的线性代数书籍很难理解的大学生

● 认为“大学第一年什么都不明白，但是线性代数也不过如此”的社会人士

● 想要报考大学理科系的高中生

本书由

● 第 1 章　何谓线性代数

● 第 2 章　基础知识

● 第 3 章　矩阵

● 第 4 章　矩阵（续）

● 第 5 章　向量

● 第 6 章　向量（续）

● 第 7 章　线性映射

● 第 8 章　特征值和特征向量

这几章构成。各章内容大体上都由

● 漫画部分

● 补充漫画部分的文章构成。也有几章只有漫画，没有补充解说部分。

读了漫画部分以后，再去读后面章节的内容就不会太费劲。大家也大致能够理解本书的意图了吧。当然，我本人并不鼓励读者采取这样的阅读方式。不过，我也不想强求那些“急需要理解线性代数知识的读者”、“大致上了解一下就足够的读者”一定都要把本书全部读完。

在此，我对给我机会写作此书的欧姆社的各位编辑致以衷心的谢意。同时，对负责作画的 Inoue 先生、负责脚本策划的 re_akino、把我的书稿做成漫画的 TREND-PRO 公司表示感谢。另外，平冈禾幸先生和堀玄先生也针对本书给我提出了很多宝贵的意见，在此我深表谢意。

高桥　信

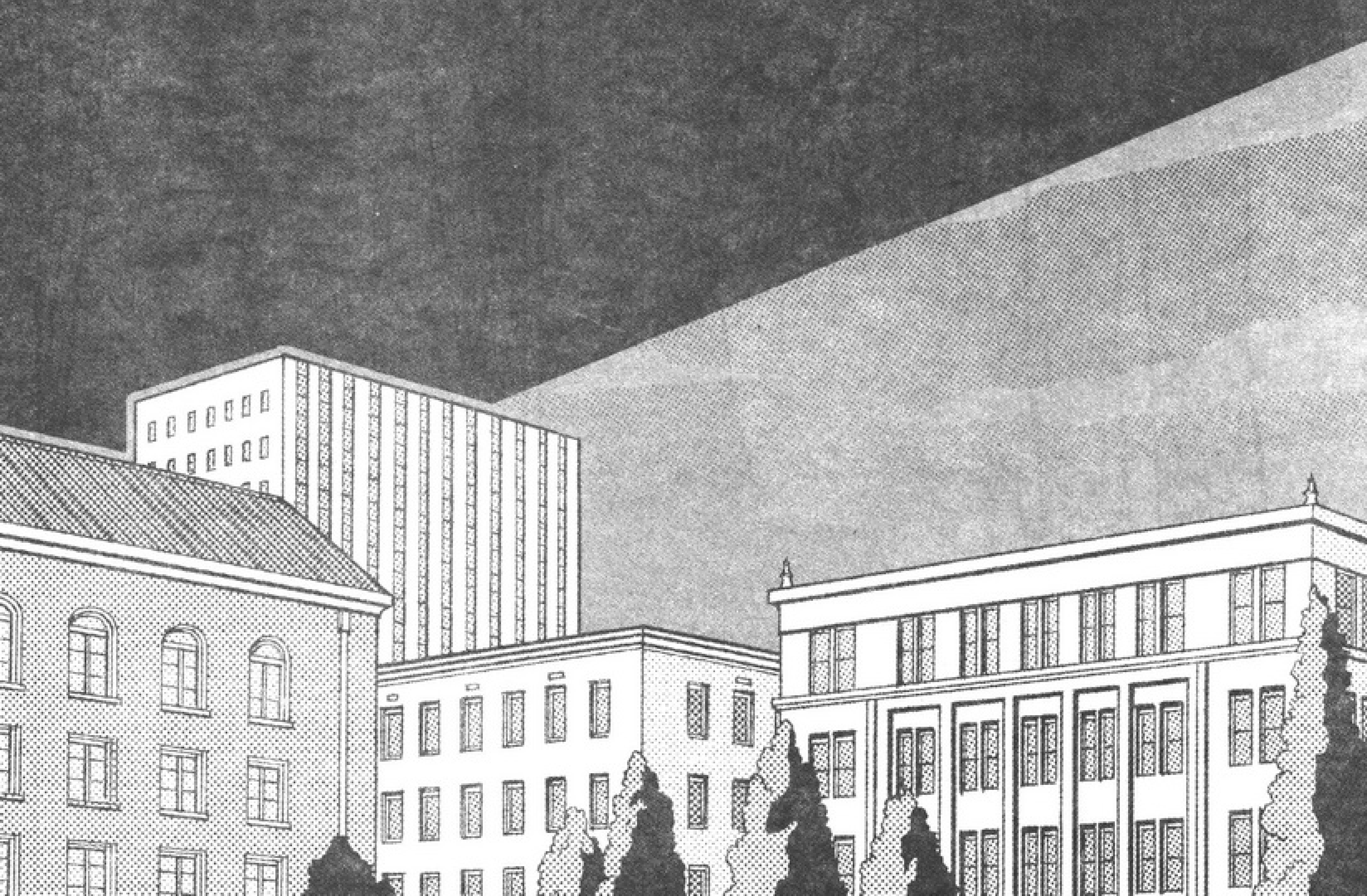
✿目　录✿

附录 2~4 的内容在北京东方科龙图文有限公司的网站 http://okbook.com.cn 内关于本书的介绍页中有说明，请下载后使用。



序章

加油！线性代数





花道大学——
エイッ
セヤァァ
这里……
真派花道空手道会
就是真派花道空手道部。
我要改变自己！


哇!
对不起，
打扰一下……
ドキ
ドキ
ドキ
ドキ
真派花道
你是谁？



我是新来的学生，我叫百合野玲治。
你是一之濑战太郎主将吧？
是的。
是那个被称为“花道大的传奇人物”的一之濑战太郎……
那个……
？
真派花道
我想在你手下练习空手道！
我想加入真派花道空手道会！
请你做我的教练吧！
你是认真的吗？像你这么瘦弱的人，我怕是坚持3天就不行了吧！


拜托你了！
我……
想让自己变得
强壮有力！！
ガタ
ガタ
ガタ
……
嗯？
我好像在哪儿
见过你？
噢？
哇！


你就是我妹妹的数学参考书上的……
在校大学生教你轻松学数学
百合野铃冶 著
啊，你也知道这个啊？
那本书是你写的？
在上大学之前学习了一下……
数学，我还是有些自信的。
原来是这样！
嗯！
我可以考虑让你加入。
啊？
是，是的！


真的吗？
不过！！
我有个条件，你要给我妹妹辅导数学！
她数学很差。
她昨天还在为学习数学而头疼，说根本看不懂线性代数的内容。
？
我知道了！不就是做家庭教师吗？可以啊！


真派花道
真派
你愿意接受这个条件吗？
我当然愿意！
不过，我事先声明，
你可不要打她的主意！
ゴキ
ゴキ
这个你就不用担心了。
好，那你跟我来！
你可要勤加练习。
嗯！
那就拜托你了！
真派花道空手道会
我要彻底改变自己！！

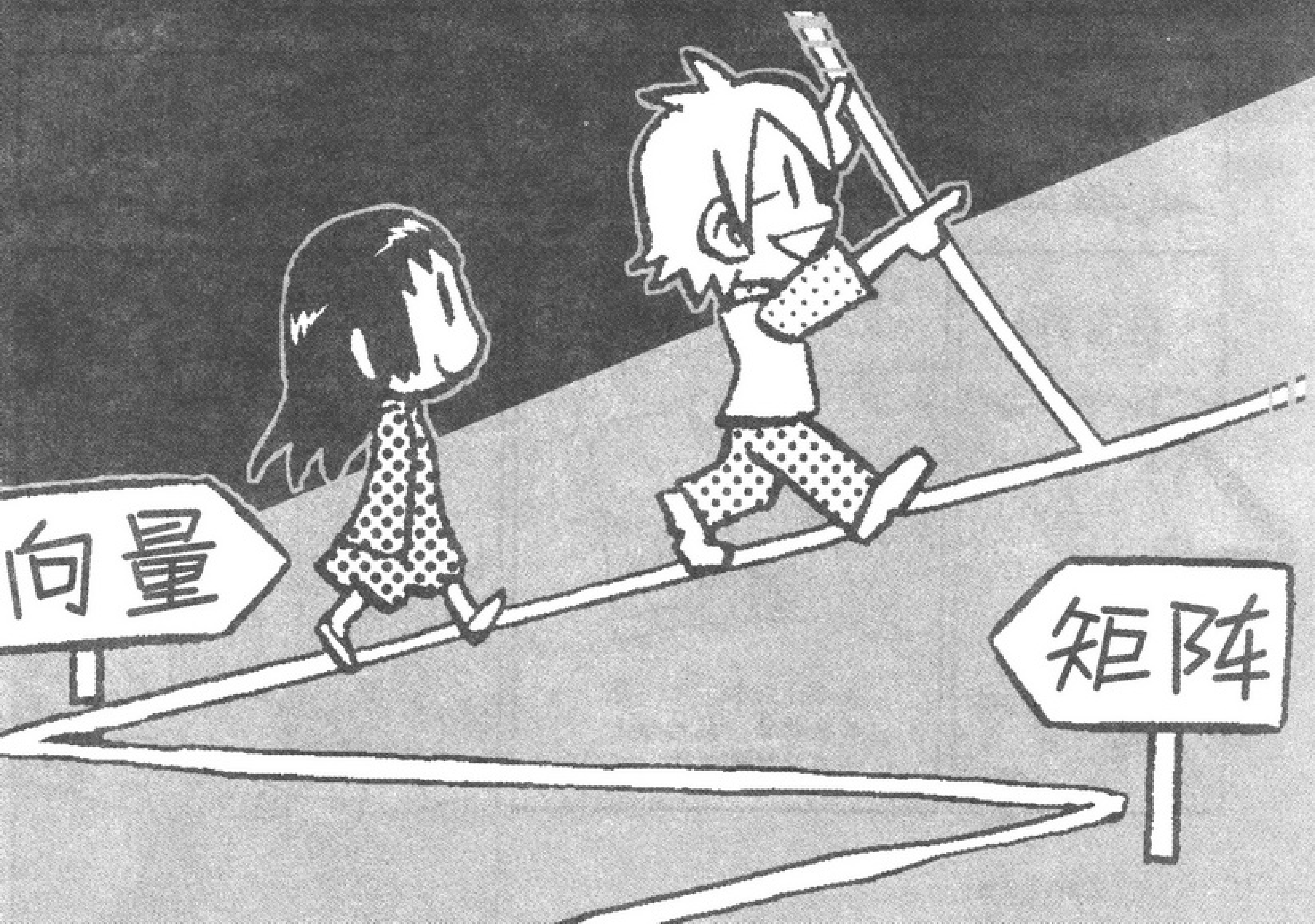
第1章

何谓线性代数

1. 线性代数

2. 研究要点和考试要点

3. 数学家眼中的线性代数




今天的练习就到这儿！
加油！！
ゼェ
ゼェ
也谢谢大家！
谢谢！
非常感谢！
百合野！
わっ
你还撑得住吗？
哦，我会坚持的！
把屋子打扫一下，再收拾收拾，然后马上去我妹妹那儿！
这么多学生，难免有不认识的。况且她还是一年级新生。
见面的地点在——


ストーン
呼……
筋疲力尽
一之濑主将的妹妹是哪个呢？
呜呜！好疼啊！
是她吗？
对不起，请问一下，
你是百合野玲治吗？
啊？
初次见面！
我是一之濑美纱。



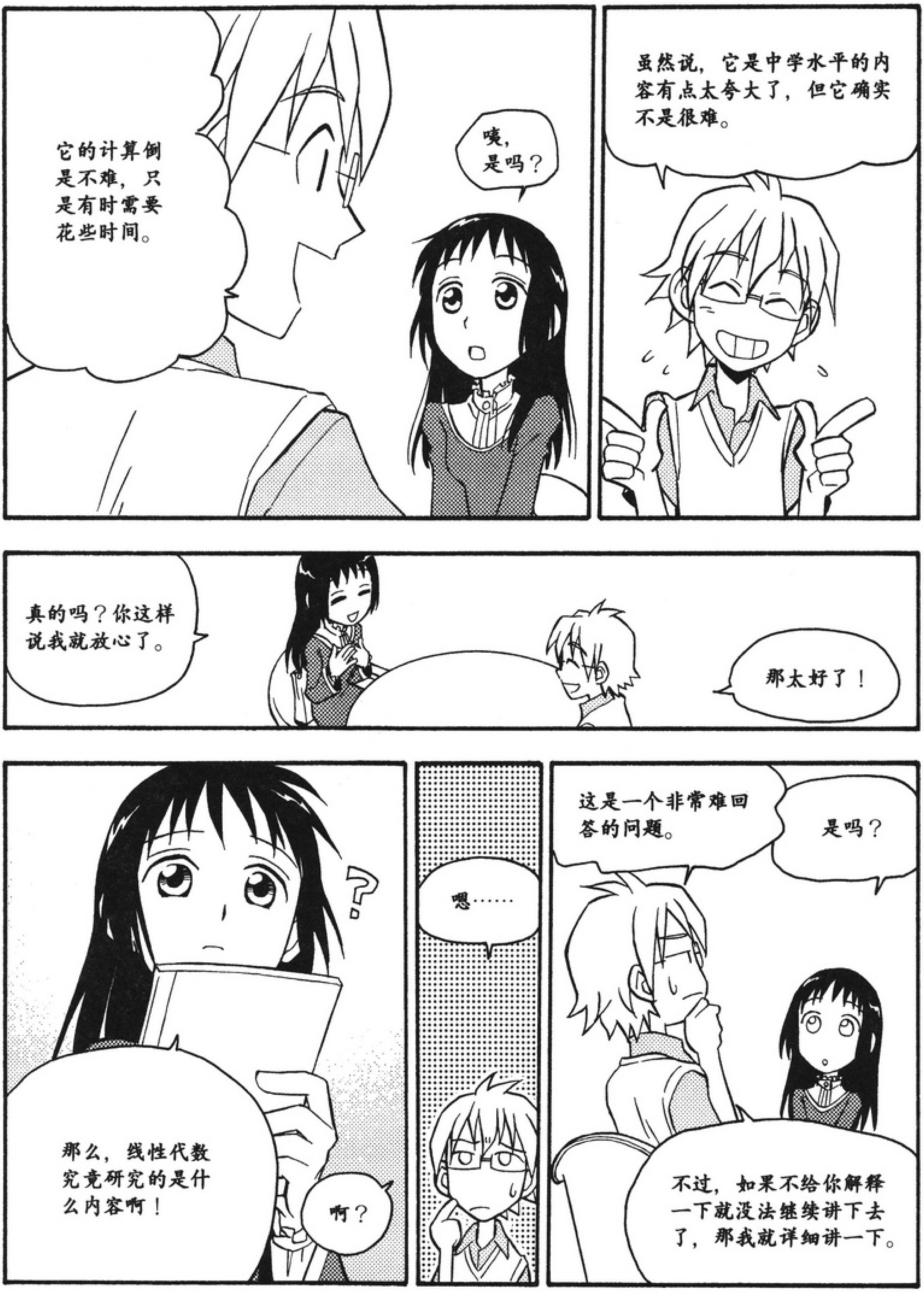
真不好意思，我哥哥提出了这么唐突的要求。
不，没什么，不用太放在心上。
主将和她竟然是兄妹！
不过……
没想到百合野给人的感觉如此亲切。
你说得我都有点不好意思了。
谢谢你能亲自辅导我。
那个……我能请你给我签个名吗？
啊，签名就不要了吧！
至少给我留个名字吧。
你既然这么说，那么……好吧！
啊！


对……
……
对不……
起！
美纱，不好意思，我先回去了。
哥哥！
百合野
你听明白了吗？
我明白了！

1. 线性代数



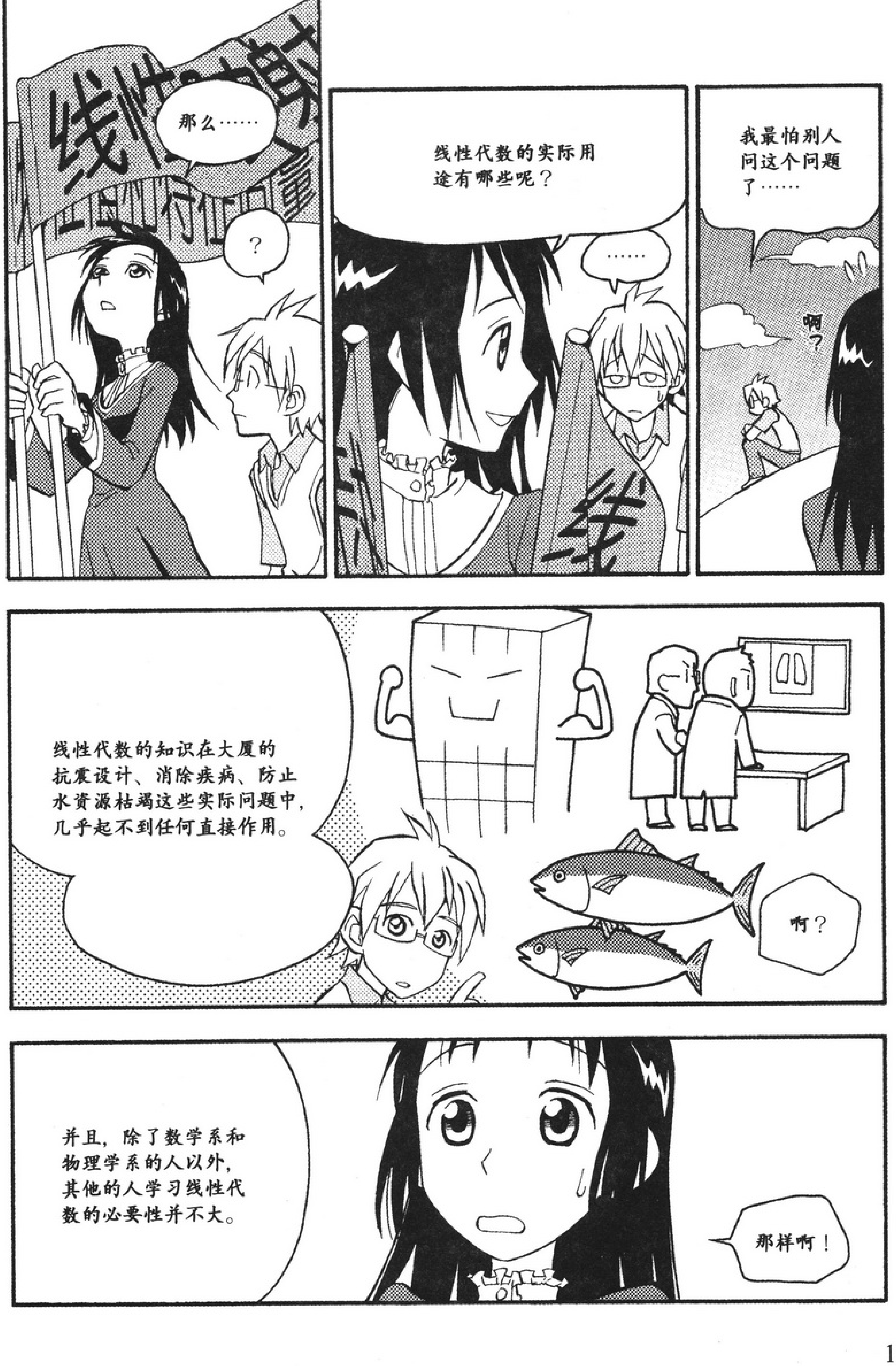
那么，让我们开始上线性代数课吧！
请多多关照！
好像听……
一之濑主将说美纱一直为学习线性代数而苦恼？
是的！
它太抽象了，我搞不清楚它在讲什么。
而且计算似乎也很难。
线性代数确实很抽象，
经常会出现一些很难懂的概念。
线性无关
基底
子空间
不过……



它的计算倒是不难，只是有时需要花些时间。
咦，是吗？
虽然说，它是中学水平的内容有点太夸大了，但它确实不是很难。
真的吗？你这样说我就放心了。
那太好了！
那么，线性代数究竟研究的是什么内容啊！
啊？
嗯……
这是一个非常难回答的问题。
是吗？
不过，如果不给你解释一下就没法继续讲下去了，那我就详细讲一下。



把三维的世界转换为二维的世界！
把二维的世界转换为三维的世界！
把二维的世界转换为二维的世界！
笼统地说，线性代数就是一门将 m 维世界与 n 维世界联系起来的学科。
啊！
矩阵……
矩阵
向量
学习向量后……
线性映射
特征值和特征向量
目标就是理解线性映射、特征值和特征向量这些概念。
向量
矩阵
哦，是吗？

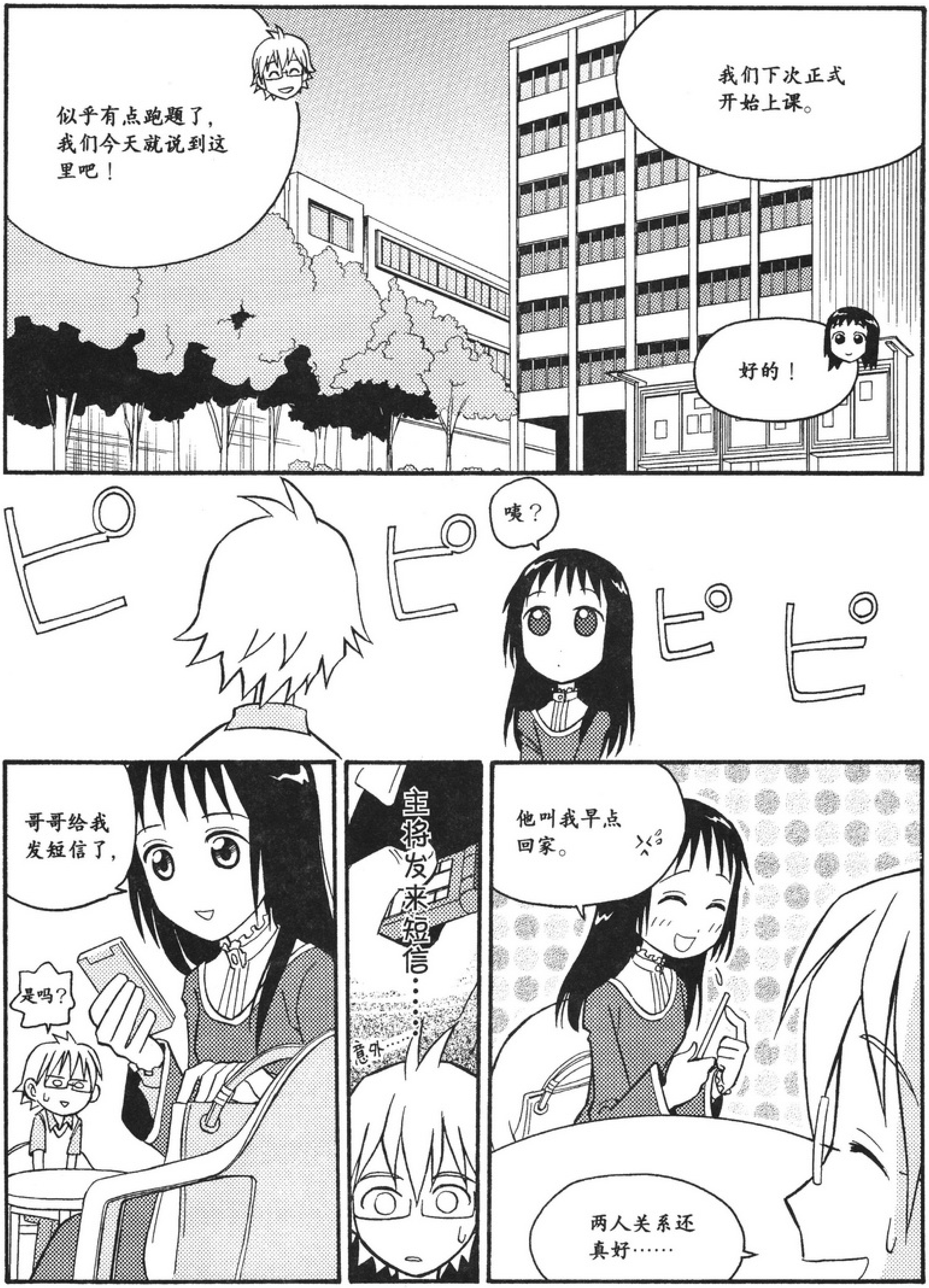


那么……
？
线性代数的实际用途有哪些呢？
……
我最怕别人问这个问题了……
啊？
线性代数的知识在大厦的抗震设计、消除疾病、防止水资源枯竭这些实际问题中，几乎起不到任何直接作用。
啊？
并且，除了数学系和物理学系的人以外，其他的人学习线性代数的必要性并不大。
那样啊！



那么，你是说学习线性代数没有任何用处？
我不是那个意思。
比如，就像厨师苦练切菜的手艺是为了将来能够独当一面而打好基础一样，
理科学生学习线性代数也是为将来能够展翅高飞打好基础。
原来如此啊！
从很早以前开始，理科学生学习线性代数就是必需的。
美纱，认识到它的重要性，就一起好好学习吧。
如果没有掌握线性代数的知识，有些书就根本读不懂。
好的！


下面再说说我的授课方式。
我会让你掌握线性代数的整体情况。
线性映射
特征值和特征向量
わ
在一般有关线性代数的讲义和教科书中，经常会出现一些比较复杂的计算和证明，
同理
所以
我上课时会尽量避免这些。
那太好了！
我会尽量讲得简单易懂一些，你也要好好努力哦！
谢谢！



似乎有点跑题了，我们今天就说到这里吧！
我们下次正式开始上课。
好的！
ピ
ピ
咦？
ピ
ピ
哥哥给我发短信了，
是吗？
主将发来短信……
意外……
他叫我早点回家。
两人关系还真好……

✱ 2. 研究要点和考试要点 ✱

下表是笔者依个人观点总结出来的在线性代数考试中可能会遇到的出题点。

	本书中相应的位置
利用消元法求逆矩阵	第 4 章
行列式的值的求法	第 4 章
用克莱姆法则求解方程组	第 4 章
特征值与特征向量的求法	第 8 章
内　积	附录 2[1]
外　积	附录 3

如果认真学习这些单元中列出来的问题集，就能够在考试中取得高分。但是，即使非常熟悉这些知识点，也不能理解线性代数的重点内容——线性映射（将在第 7 章解说）。线性代数难就难在其研究要点和考试要点并不一致。

我们将学习结果归纳为如下 4 种情况：

① 在线性代数的考试中得高分，并且理解线性映射；
② 在线性代数的考试中得高分，但不理解线性映射；
③ 在线性代数的考试中得低分，但是理解线性映射；
④ 在线性代数的考试中得低分，并且不理解线性映射。

通常我们考虑到就业和升学的因素，①或②对大学生来说是最有利的结果。确实，笔者也赞同①是最好的结果。但是却不肯定②。为什么呢？这是因为②是一种“只见树木，不见森林”的情况。也就是说，一毕业就会认为线性代数就是一门难懂的学问，已经将它忘得一干二净。长远来看，笔者认为③倒是比②更好的结果。

1. 附录 2 和附录 3 在北京东方科龙图文有限公司的网站 http://www.okbook.com.cn/ 中有关于本书的介绍页。

✱ 3. 数学家眼中的线性代数 ✱

请一定要阅读本节内容，并且读完后请一定要忘记。如果不忘记就会影响对下面知识的理解。或许很多读者会认为干脆将本节内容删去好了。但是，在笔者看来，还是有必要让大家了解一下这部分内容。

3.1 数学家眼中的线性代数

在第 16 页中，我们曾叙述过线性代数是一门将 n 维世界与 m 维世界连接起来的学问。基本上在读完本书后，就能够完全理解这一定义。不过，数学家对线性代数的理解却不一样。在他们的眼中，线性代数是一门以下页方框中所示的以线性空间为“舞台”的学问。另外，在下页方框中介绍的向量与高等院校中学习的

•《数学 B》[1]•

本书中的“第 5 章 向量”

以及以后的各章所出现的向量都有很大的不同，它是更高层次的抽象概念。

或许能够理解下页方框中的意思的读者非常少，但是请放心，无法理解是很正常的。除非你想成为数学家，否则没有必要去理解。不过，就像知道打棒球是在棒球场，打高尔夫是在高尔夫球场一样，学习线性代数是在线性空间里，明白这一点是很有必要的。

借此机会，让我们先举一个实线性空间的例子。比如，像 $7t^4-3t-4$ 和 $2t-1$ 这样的“由系数是实数的 n 次多项式组成的集合”就满足实线性空间的公理。也就是说，

- “由系数是实数的 n 次多项式组成的集合”是实线性空间；
- 像 $7t^4-3t-4$ 和 $2t-1$ 这样的 n 次多项式是向量。

1. 如果是像笔者那样水平的读者，就是指“代数 · 几何”。

■ **线性空间**

x_i、x_j 和 x_k 为集合 X 的任意元素。c 和 d 为任意数。

当集合 X 满足以下两个条件时，就可以说“集合 X 是**线性空间**”，“集合 X 是**向量空间**”。

条件 1

对于 x_i、x_j，如果有一个被称为和的元素 x_i+x_j，并且和满足以下条件：

① $(x_i+x_j)+x_k=x_i+(x_j+x_k)$

② $x_i+x_j=x_j+x_i$

③ 存在着使“$x_i+0=0+x_i=x_i$”成立的被称为**零向量**的 0

④ 对于 x_i，存在着使“$x_i+(-x_i)=(-x_i)+x_i=0$”成立的被称为**逆向量**的 $(-x_i)$

条件 2

对于 x_i 和 c，如果有一个被称为**数倍**（**数量倍**）的元素 cx_i，并且数倍满足以下条件：

⑤ $c(x_i+x_j)=cx_i+cx_j$

⑥ $(cd)x_i=c(dx_i)$

⑦ $(c+d)x_i=cx_i+dx_i$

⑧ $1x_i=x_i$

我们把 c 和 d 是实数的线性空间称作**实线性空间**或**实数向量空间**，把 c 和 d 是复数的线性空间称作**复线性空间**或**复数向量空间**。

如果满足从①到⑧的 8 个条件，我们就将之称作**线性空间的公理**或**向量空间的公理**。线性空间的元素叫做**向量**，c 叫做**数量**。

3.2 线性代数和公理

数学家眼中的线性代数意思难懂,太抽象了。在先前[1]的数学中,像“整体大于部分”、“通过直线外的一点与这条直线平行的直线只有一条[2]”这些被人们认为理所当然的命题[3]都被称为公理，并且以这些公理为基础来考察事物。但是，随着时代的进步，有些数学家开始对这些公理提出了下列疑问。

- 仔细思考一下“整体大于部分”究竟是什么意思?
- 真的能肯定“通过直线外的一点与这条直线平行的直线只有一条”吗?

如果质疑本应该是基础理论的公理，就无法研究考察事物。并且会否定之前一直遵循公理的自己和先前的研究成果。于是，数学家们就把公理的定义从“人们认为的理所当然的命题”改为“为今后研究考察事物作准备的单纯的‘假定’”。并且，只要今后的研究考察能够顺利展开，无论这个假定是什么都可以。

改了公理的定义后，数学的世界就变得更加广阔了。与此同时，也变得更为抽象，更为脱离实际了。请看前面一页，也出现了“公理”这个词。线性代数就是一门将公理定义修改后兴起的潮流学科。

1. 关于具体的时间，笔者并不是专修数学史的，所以也不敢妄加断言。对此有兴趣的读者请查阅本书卷末的参考文献栏目中的文献。

2. 严格地说，这不是公理，而应被称作公准。这一点有些复杂，并且与本节的主旨无关，所以本书不再对公理和公准的不同之处另作解说。

3. 可能有的读者认为太抽象了，完全不明白这个段落的整体意思。其实明不明白都没有关系，只要我们认识到时代是向着抽象的方向发展就足够了。

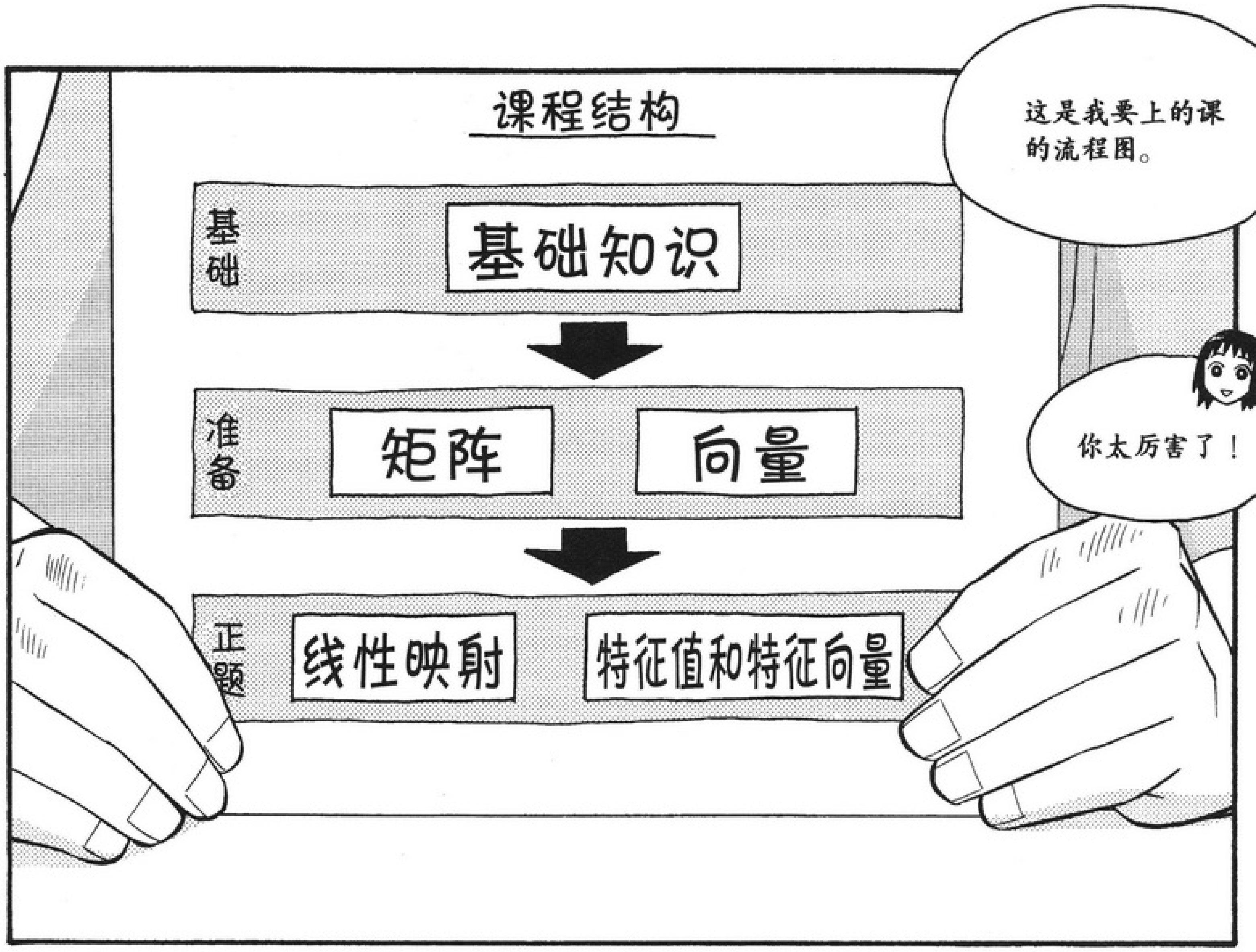
第2章

基础知识




79
80
81
无论做什么事情，打好基础都是最重要的。
哇……
バダッ
呀，撑不住了！
100……
差得远呢！胳膊要撑住，用腹部和背部来伏地挺身……
你好，今天让我们一起来努力学习吧！
我总觉得百合野精神状态不好。
你不要紧吧？
不……
不要紧，我们开始上课吧！

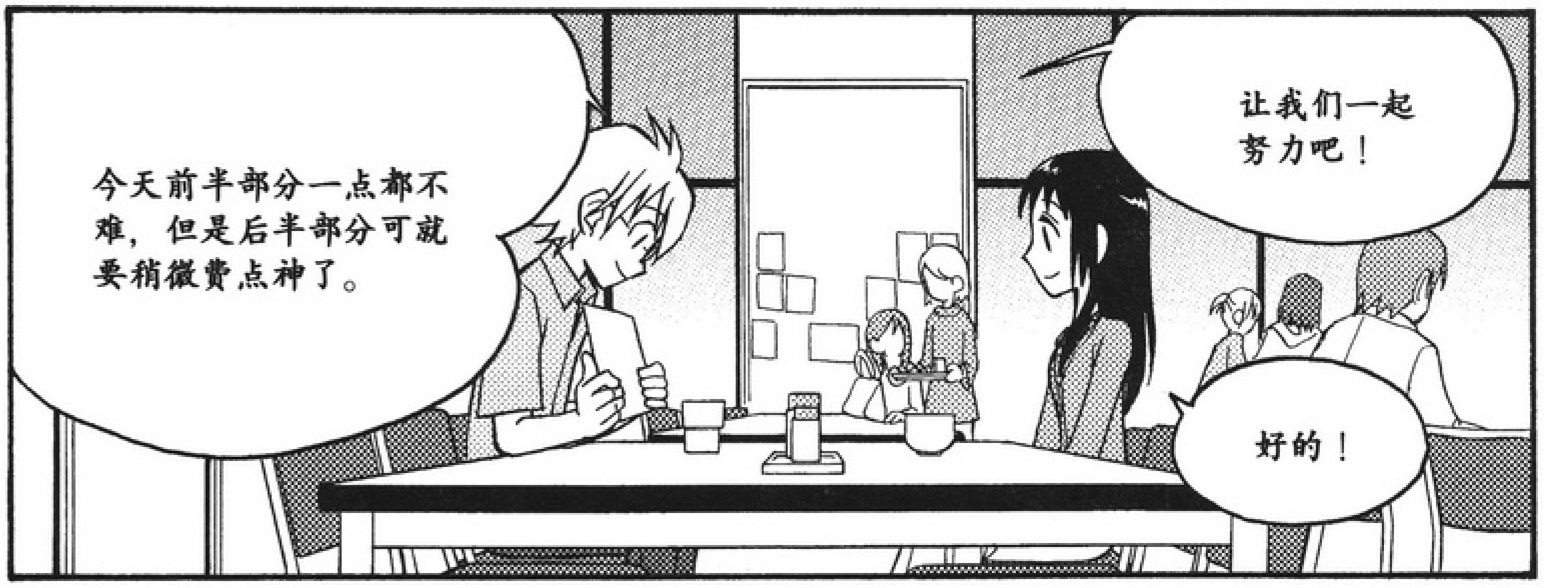

啊！
不好意思，其实是我肚子饿了。
没关系，训练很消耗体力吧！
那我先吃了。
请慢用！
让你久等了。现在开始上课吧！
请看这个……



课程结构
基础
基础知识
准备
矩阵
向量
正题
线性映射
特征值和特征向量
这是我要上的课的流程图。
你太厉害了！



今天我要讲一下学习线性代数必需的数学基础知识。
课程结构
基础知识
矩阵
向量



今天前半部分一点都不难，但是后半部分可就要稍微费点神了。
让我们一起努力吧！
好的！

✱ 1. 数的分类 ✱

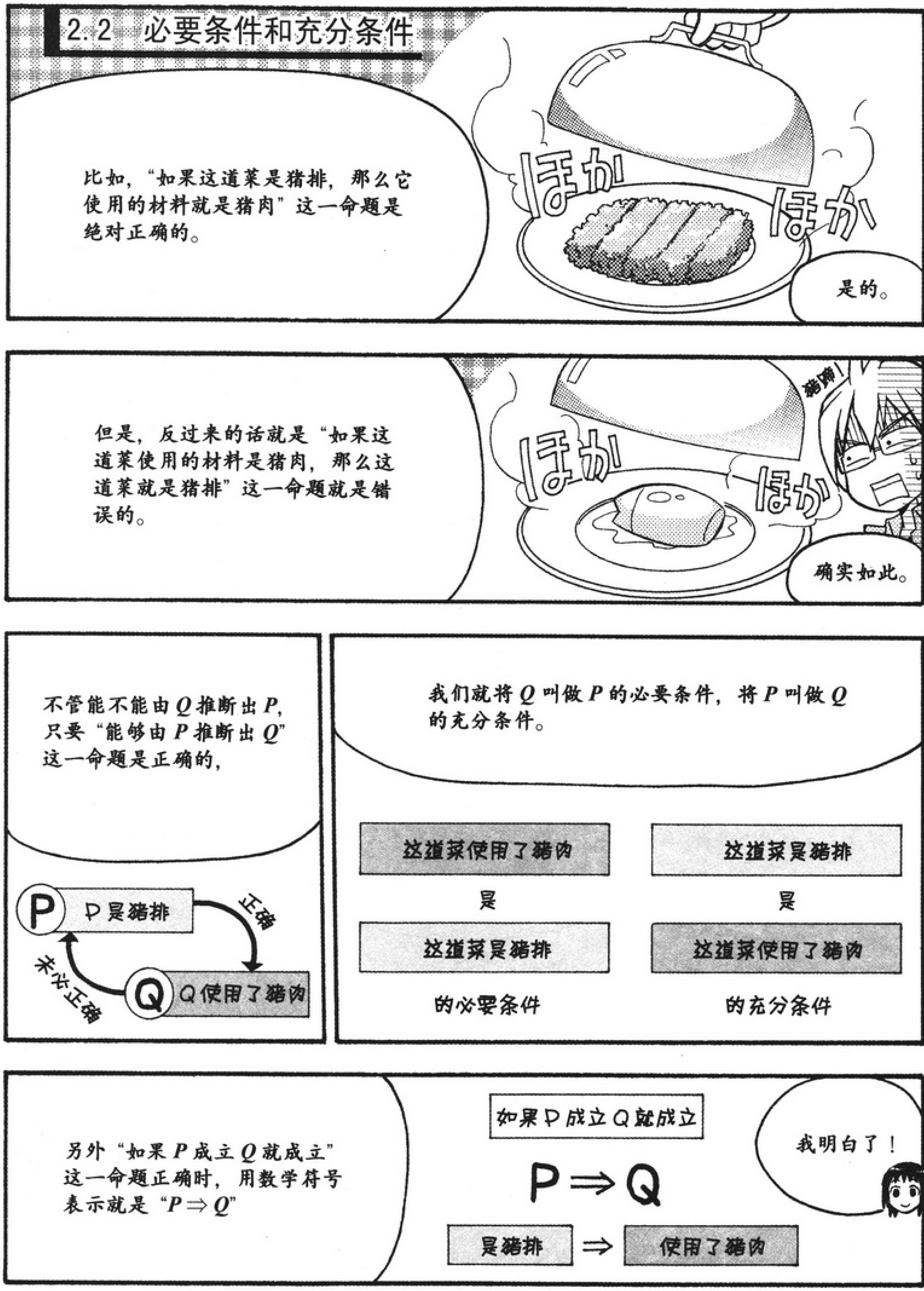

复数
· a+bi
※a和b是实数
※i是虚数单位，其被定义为"$i^2=-1$"。
实数
整数
· 正整数
· 0
· 负整数
非整数的有理数
· 像0.3这样的有限小数
· 像0.333…这样的循环小数
无理数
· 像π和$\sqrt{2}$这样的无限不循环小数
纯虚数
· 像bi这种形式的数
（b为非零实数）
可以用q/p（p为非零整数，q为整数）这种形式表示的数叫做有理数。整数是有理数的一种。
首先，数可以这样分类。
……
我不太明白复数中i的意义。
i
哦，这个嘛……
"如果能够解出像$x^2+5=0$这样的二次方程式就太好了"，它就是基于这一想法而设想出来的数。
？


也就是说……
さら
さら
$x^2+5=x^2-(-5)=(x+\sqrt{5}i)(x-\sqrt{5}i)=0$
如果变形成这样，$x^2+5=0$ 这个方程就能解出来了。i 就是为了可以解释得通而设想出来的数。
这样的方程也能解出来，真是太好了！
我理解你的心情，不过线性代数中也包含复数，有很多人都对其作了论述。
是吗？
啊？
那么，我必须要熟悉这个概念，是吗？
不，我的课不会再涉及到复数。
因为很难把握住线性代数的概念……
噢，这我就放心了！

2. 充分必要条件

2.1 命题




2.2 必要条件和充分条件
比如，“如果这道菜是猪排，那么它使用的材料就是猪肉”这一命题是绝对正确的。
ほか
ほか
是的。
但是，反过来的话就是“如果这道菜使用的材料是猪肉，那么这道菜就是猪排”这一命题就是错误的。
ほか
ほか
确实如此。
不管能不能由 Q 推断出 P，只要“能够由 P 推断出 Q”这一命题是正确的，
P P 是猪排
正确
Q Q 使用了猪肉
未必正确
我们就将 Q 叫做 P 的必要条件，将 P 叫做 Q 的充分条件。
这道菜使用了猪肉
是
这道菜是猪排
的必要条件
这道菜是猪排
是
这道菜使用了猪肉
的充分条件
另外“如果 P 成立 Q 就成立”这一命题正确时，用数学符号表示就是“P ⇒ Q”
如果 P 成立 Q 就成立
P ⇒ Q
是猪排 ⇒ 使用了猪肉
我明白了！


2.3 充分必要条件
如果P成立Q就成立
如果Q成立P就成立
这两个命题都正确的情况，
也就是说当P⇒Q
并且Q⇒P时，
我们把Q叫做P的充分必要条件，
把P叫做Q的充分必要条件。
这是将必要条件和充分条件合在了一起吗？
你说得没错。比如说，就是这样一种感觉。
原来如此！
P
百合野的个子比一之濑主将的个子矮。
Q
一之濑主将的个子比百合野的个子高。
数学表示如下：
P⇔Q
明白了！
百合野的个子比一之濑主将的个子矮
⇔
一之濑主将的个子比百合野的个子高

3. 集 合

3.1 集 合


在数学中经常出现集合这一概念。
啊，在高中的时候学过。
嗯，让我们简单地复习一下。
スッ
所谓集合，就像它的名称一样，是某种事物聚集在一起。
构成集合的各个事物叫做集合的元素。
呵呵，原来如此啊！
比如说，下面这个的例子。

例 1

“ 四国 ” 地区的集合是由



· 香川县

· 爱媛县

· 高知县

· 德岛县

这 4 个元素组成的。

例 2

“ 大于 1 小于等于 10 的偶数 ” 的集合是由

· 2

· 4

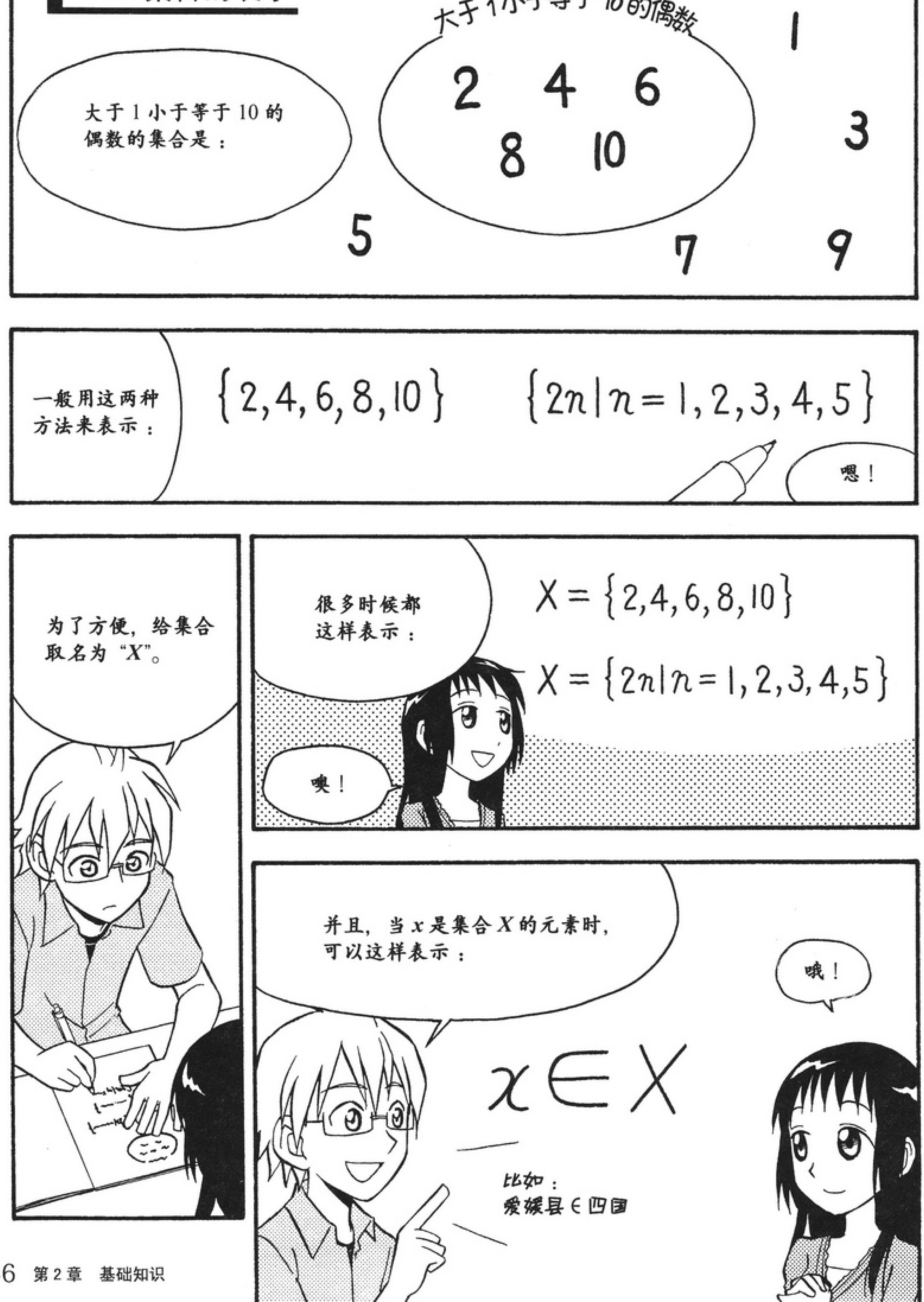
· 6

· 8

· 10

这 5 个元素组成。

3.2 集合的表示



大于1小于等于10的偶数的集合是：
大于1小于等于10的偶数
2 4 6 8 10
1 3 5 7 9
一般用这两种方法来表示：
{2,4,6,8,10}
{2n|n=1,2,3,4,5}
嗯！
为了方便，给集合取名为"X"。
很多时候都这样表示：
X={2,4,6,8,10}
X={2n|n=1,2,3,4,5}
噢！
并且，当x是集合X的元素时，可以这样表示：
哦！
x∈X
比如：
爱媛县∈四国


3.3 子 集
接下来，我要讲一下子集。
当属于集合 X 的所有元素都属于集合 Y 时
集合 Y
（日本）
北海道 青森县 岩手县 宫城县
秋田县 山形县 福岛县 茨城县
栃木县 群马县 埼玉县 千叶县
东京都 神奈川县 新潟县 富山县
石川县 福井县 山梨县 长野县
岐阜县 静冈县 爱知县 三重县 滋贺县
京都府 大阪府 兵库县 奈良县 和歌山县
鸟取县 岛根县 冈山县 广岛县 山口县
福冈县 佐贺县 长崎县 熊本县 大分县
宫崎县 鹿儿岛县 冲绳县
集合 X
（四国）
德岛县 香川县
爱媛县 高知县
可以说集合 X 是集合 Y 的子集。
可以这样表示：
X⊂Y
比如，
四国⊂日本
我明白了！

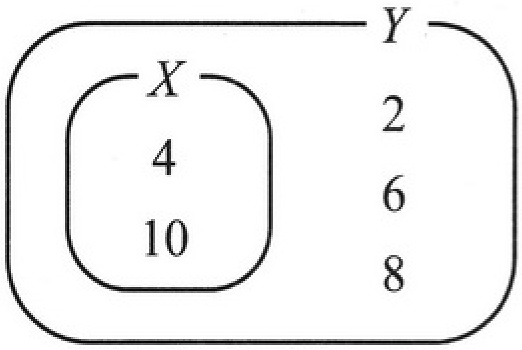
例 1

假如有两个集合：

X={4，10}

Y={2，4，6，8，10}

那么，集合 X 是集合 Y 的子集。



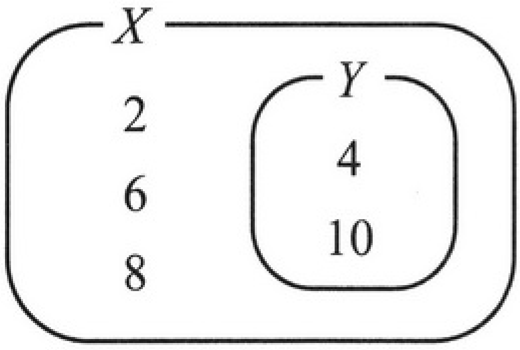
例 2

假如有两个集合：

X={2，4，6，8，10}

Y={4，10}

那么，集合 X 不是集合 Y 的子集。



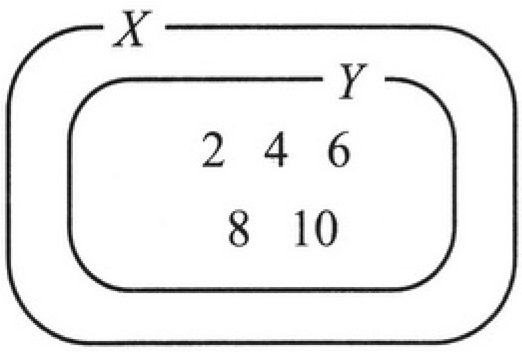
例 3

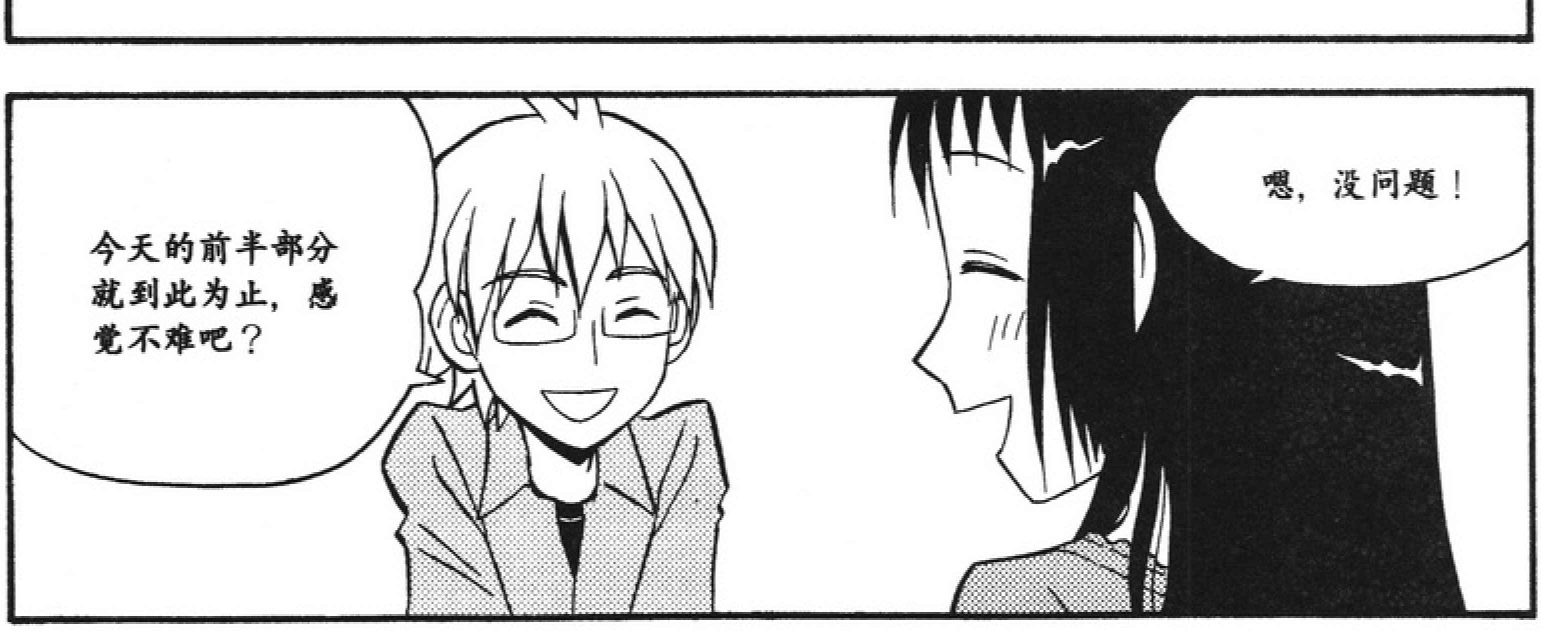
假如有两个集合：

X={2，4，6，8，10}

Y={2，4，6，8，10}

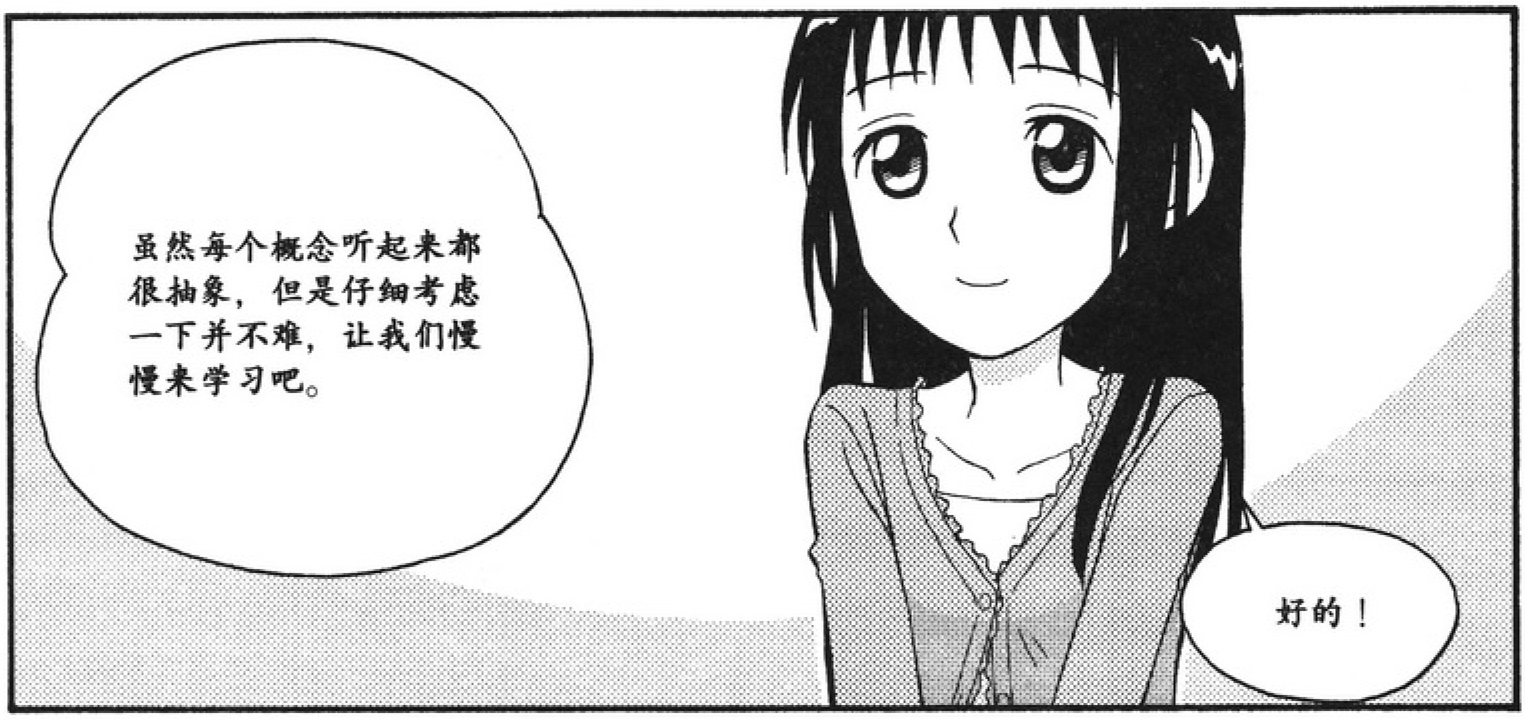
那么，集合 X 是集合 Y 的子集，集合 Y 也是集合 X 的子集。





4. 映 射

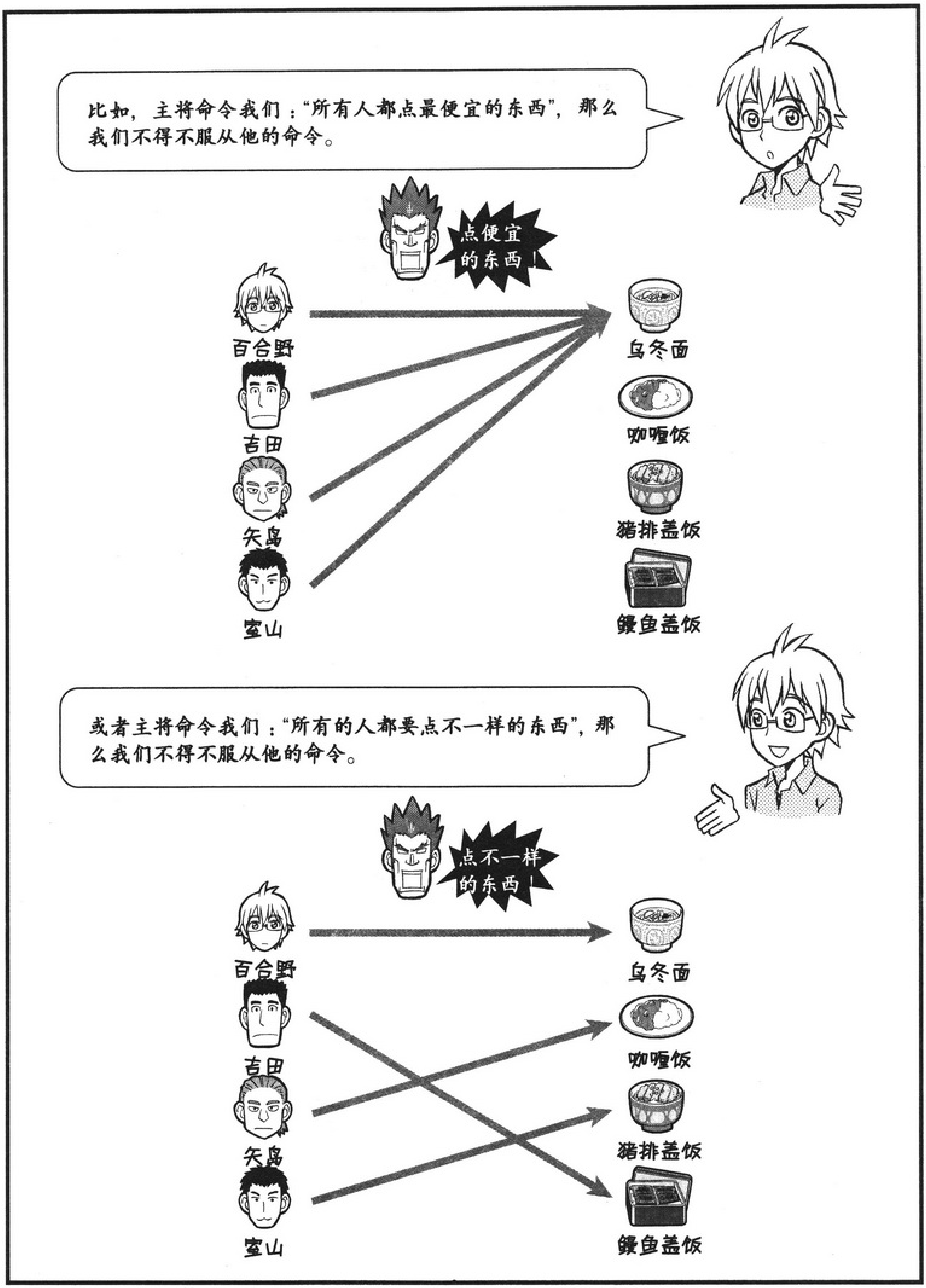

后半部分我将要解释一下，映射和与其相关的一些概念。
映射

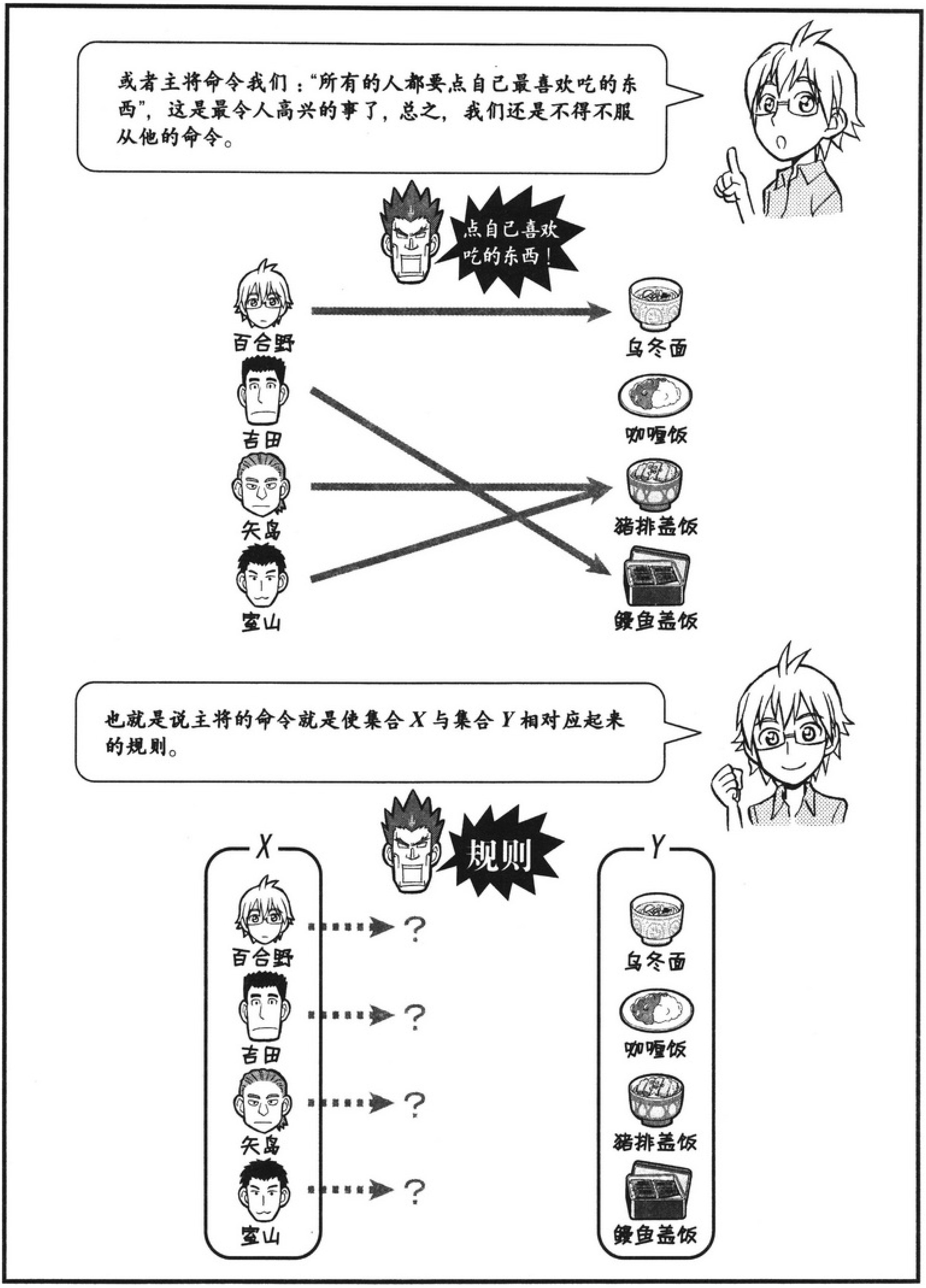

虽然每个概念听起来都很抽象，但是仔细考虑一下并不难，让我们慢慢来学习吧。
好的！

4.1 映 射


首先，我们将从映射本身开始讲解。
那就拜托你了！


打个比方说，
一之濑主将要请我们吃饭，
我们新成员一行人就去了某个餐馆。
跟我来！
这里是菜单：
乌冬面 500日元
咖喱饭 700日元
猪排盖饭 1000日元
鳗鱼盖饭 1500日元
虽说是他请吃饭，但是我们吃得并不尽兴。
为什么？
因为我们绝对不能点一之濑主将意向之外的东西。
?
菜单
就是这样的。


比如，主将命令我们："所有人都点最便宜的东西"，那么我们不得不服从他的命令。
点便宜的东西！
百合野
吉田
矢岛
室山
乌冬面
咖喱饭
猪排盖饭
鳗鱼盖饭
或者主将命令我们："所有的人都要点不一样的东西"，那么我们不得不服从他的命令。
点不一样的东西！
百合野
吉田
矢岛
室山
乌冬面
咖喱饭
猪排盖饭
鳗鱼盖饭



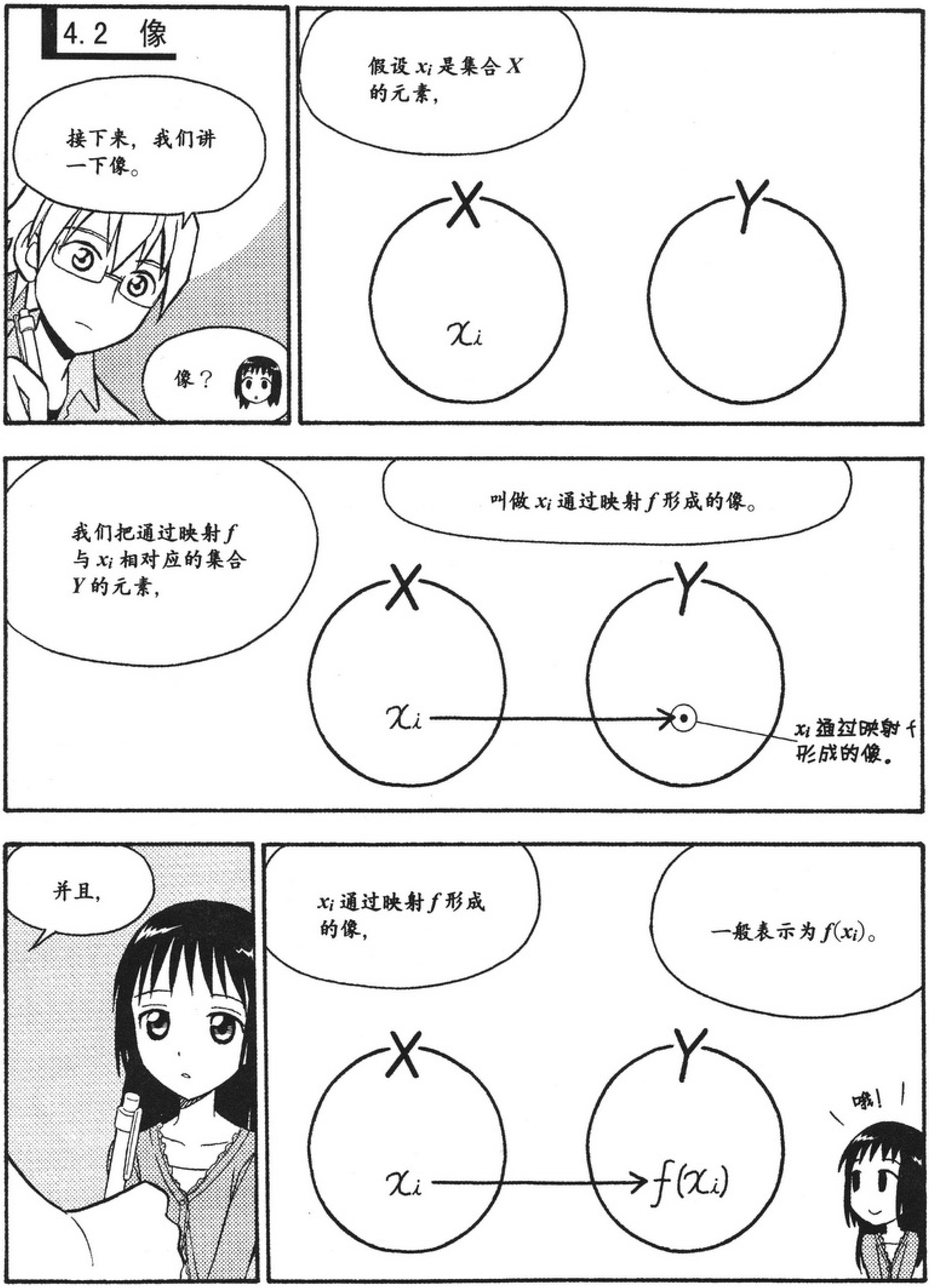
或者主将命令我们："所有的人都要点自己最喜欢吃的东西"，这是最令人高兴的事了，总之，我们还是不得不服从他的命令。
点自己喜欢吃的东西！
百合野
吉田
矢岛
室山
乌冬面
咖喱饭
猪排盖饭
鳗鱼盖饭
也就是说主将的命令就是使集合 X 与集合 Y 相对应起来的规则。
规则
X
Y
百合野
吉田
矢岛
室山
?
?
?
?
乌冬面
咖喱饭
猪排盖饭
鳗鱼盖饭



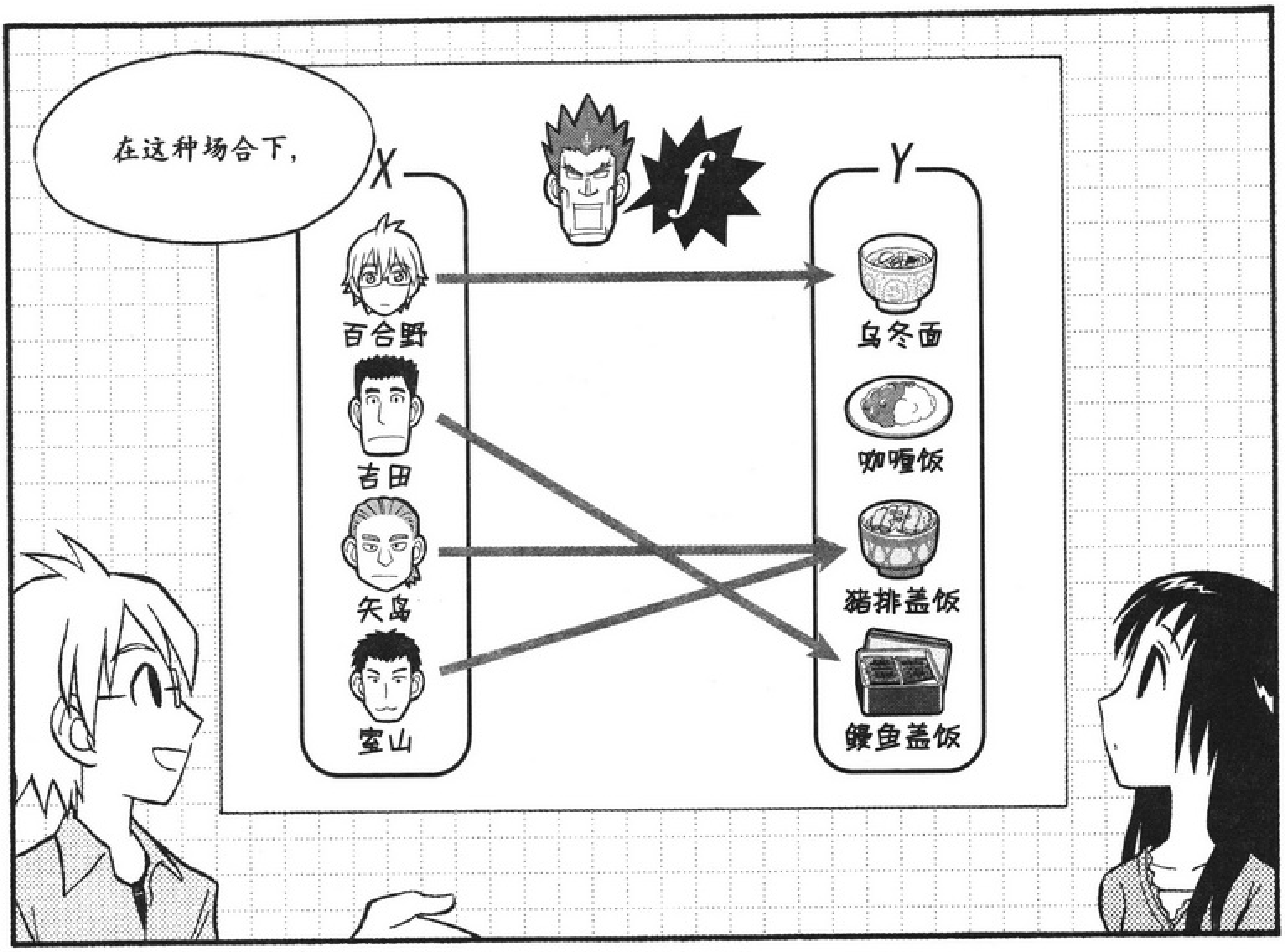
映 射

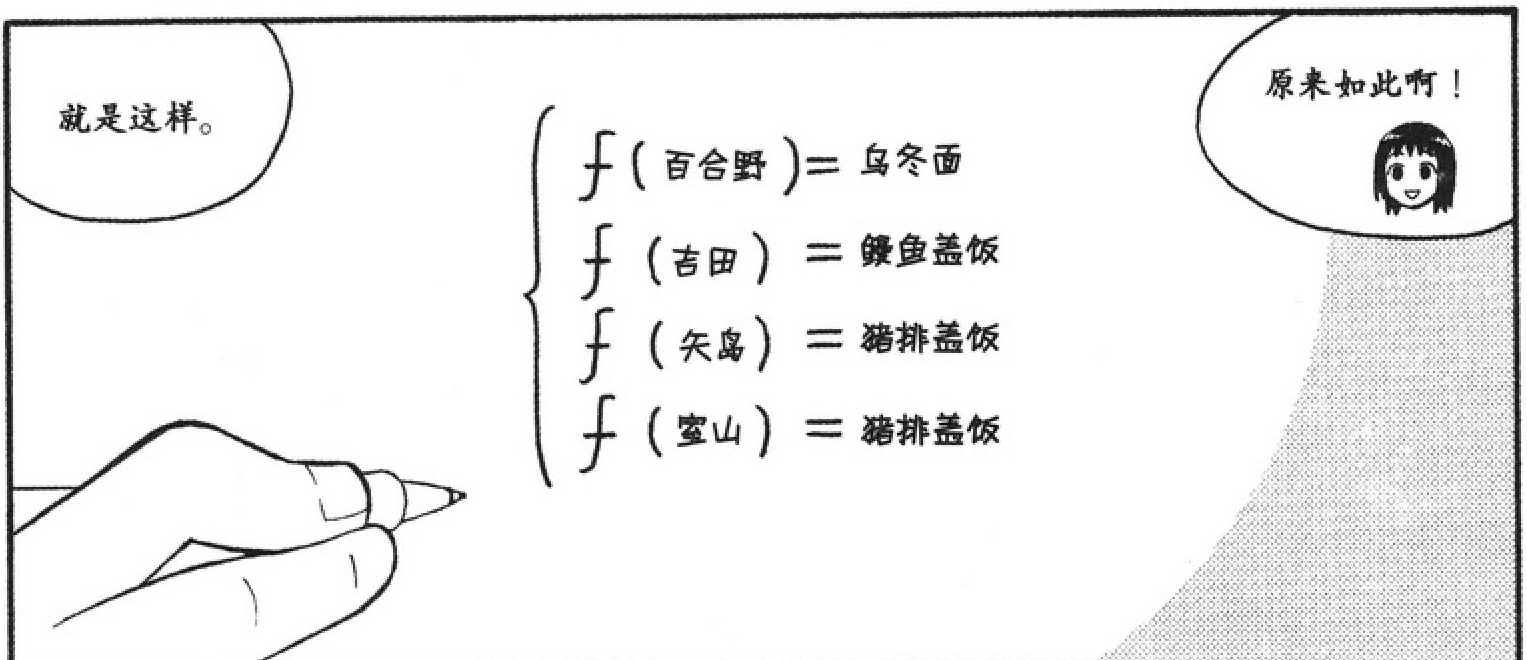
我们把使集合 Y 的元素与集合 X 的元素相对应的规则叫做“从集合 X 到集合 Y 的**映射**”。

4.2 像



接下来，我们讲一下像。
像？
假设 x_i 是集合 X 的元素，
X
Y
x_i
我们把通过映射 f 与 x_i 相对应的集合 Y 的元素，
叫做 x_i 通过映射 f 形成的像。
X
Y
x_i
x_i 通过映射 f 形成的像。
并且，
x_i 通过映射 f 形成的像，
一般表示为 $f(x_i)$。
X
Y
x_i
$f(x_i)$
哦！

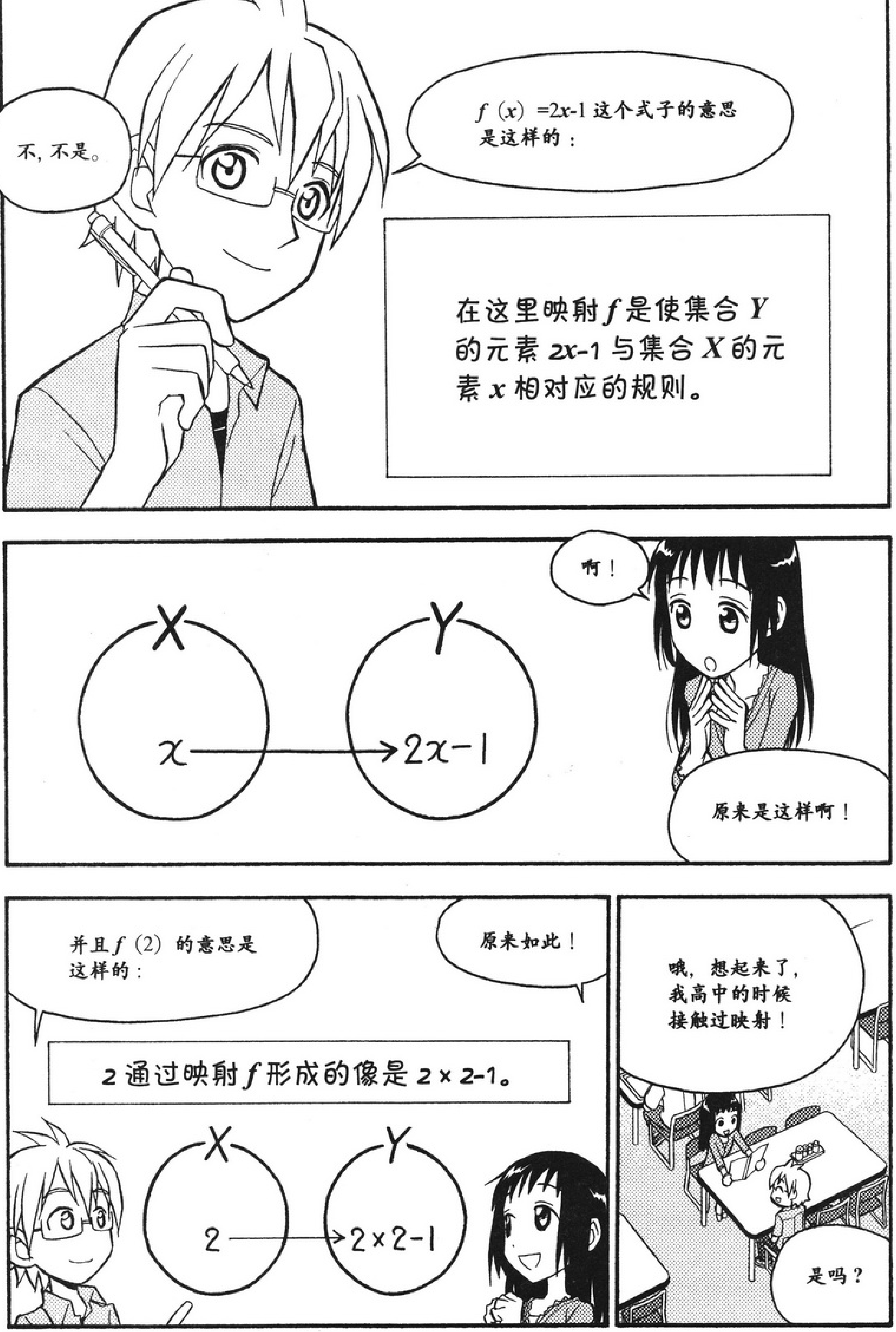




像

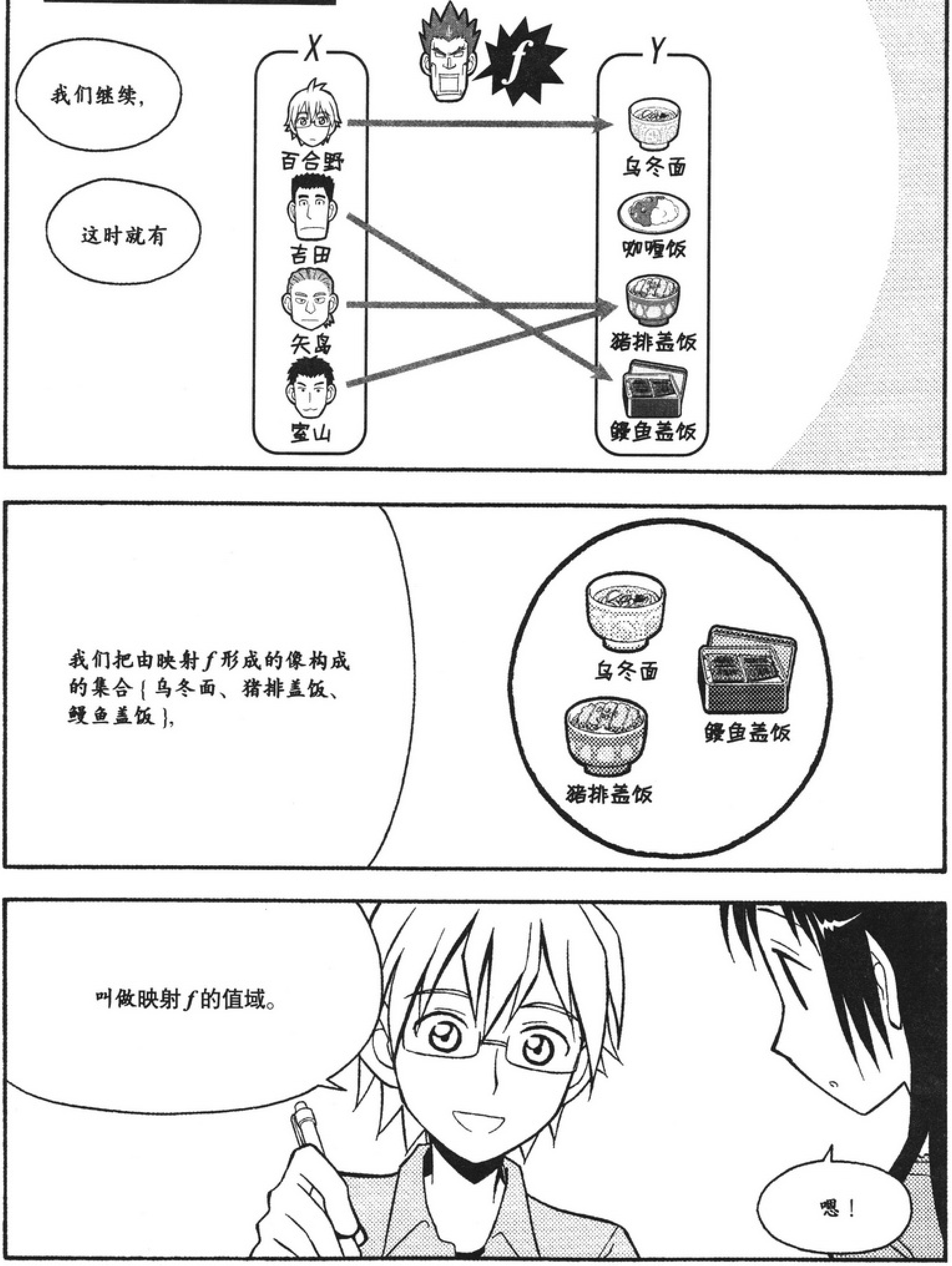
我们把通过映射 f，与集合 X 的元素 x_i 相对应的集合 Y 的元素叫做“x_i 通过映射 f 形成的像”。

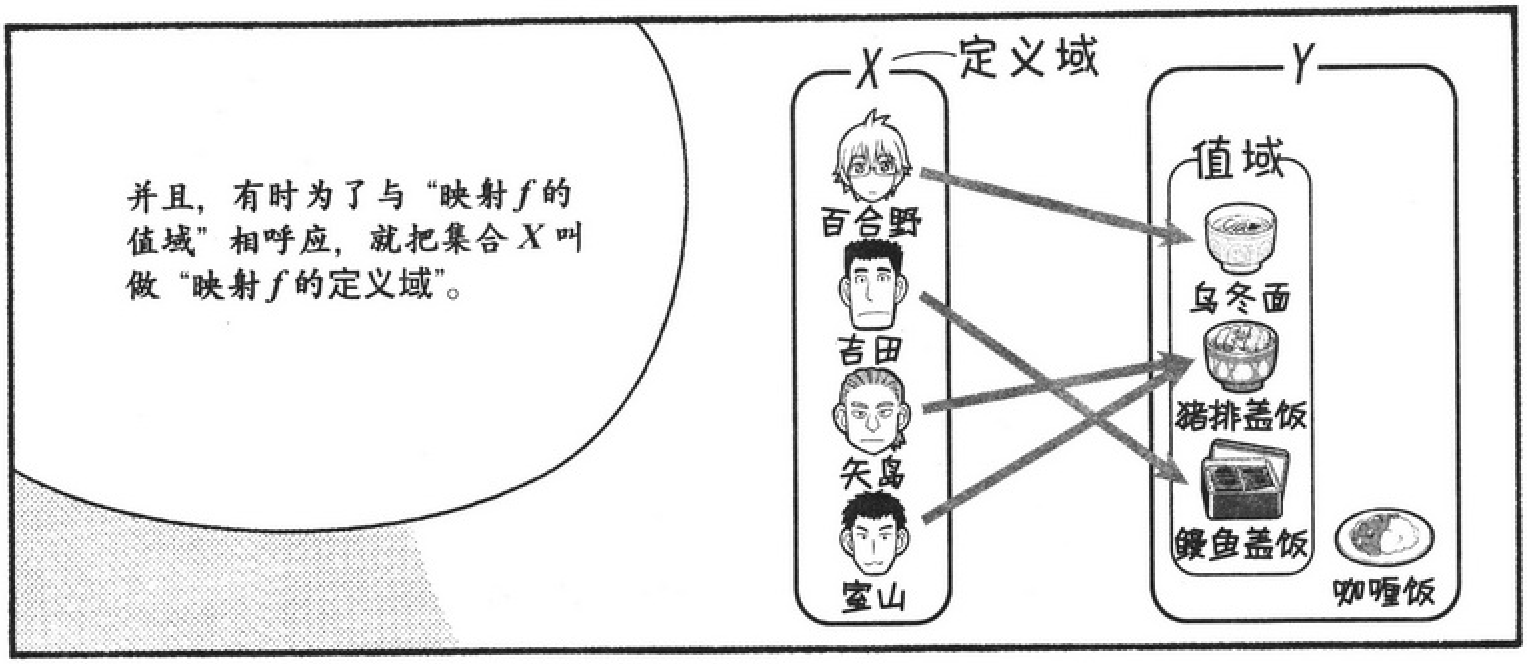

在高中的时候学过这样一种形式的式子吧？
？
嗯，学过！
f(x)=2x-1
サラッ
当时，你是不是没有想到还可以写成这样？
一般写成 y=2x-1 就可以了，为什么还要特意使用 f (x) 这样的符号呢？
我不是很明白。你是说将 2 代入这个式子中就可以写成 f (2) 了吗？
对，对，我认为是这样的。



f（x）=2x-1 这个式子的意思是这样的：
不，不是。
在这里映射f是使集合Y的元素2x-1与集合X的元素x相对应的规则。
啊！
X
Y
x
2x-1
原来是这样啊！
并且f（2）的意思是这样的：
原来如此！
2通过映射f形成的像是2×2-1。
X
Y
2
2×2-1
哦，想起来了，我高中的时候接触过映射！
是吗？

4.3 值域和定义域


我们继续，
这时就有
X
f
Y
百合野
吉田
矢岛
室山
乌冬面
咖喱饭
猪排盖饭
鳗鱼盖饭
我们把由映射f形成的像构成的集合{乌冬面、猪排盖饭、鳗鱼盖饭}，
乌冬面
鳗鱼盖饭
猪排盖饭
叫做映射f的值域。
嗯！





值域和定义域

我们把由映射f产生的像构成的集合{$f(x_1)$、$f(x_2)$，…，$f(x_n)$}叫做“映射f的**值域**。并且有时为了与“映射f的值域”相呼应，就把集合X叫做“映射f的**定义域**”。

映射f的值域与集合Y的关系有时是

$$\{f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_n)\}=Y$$

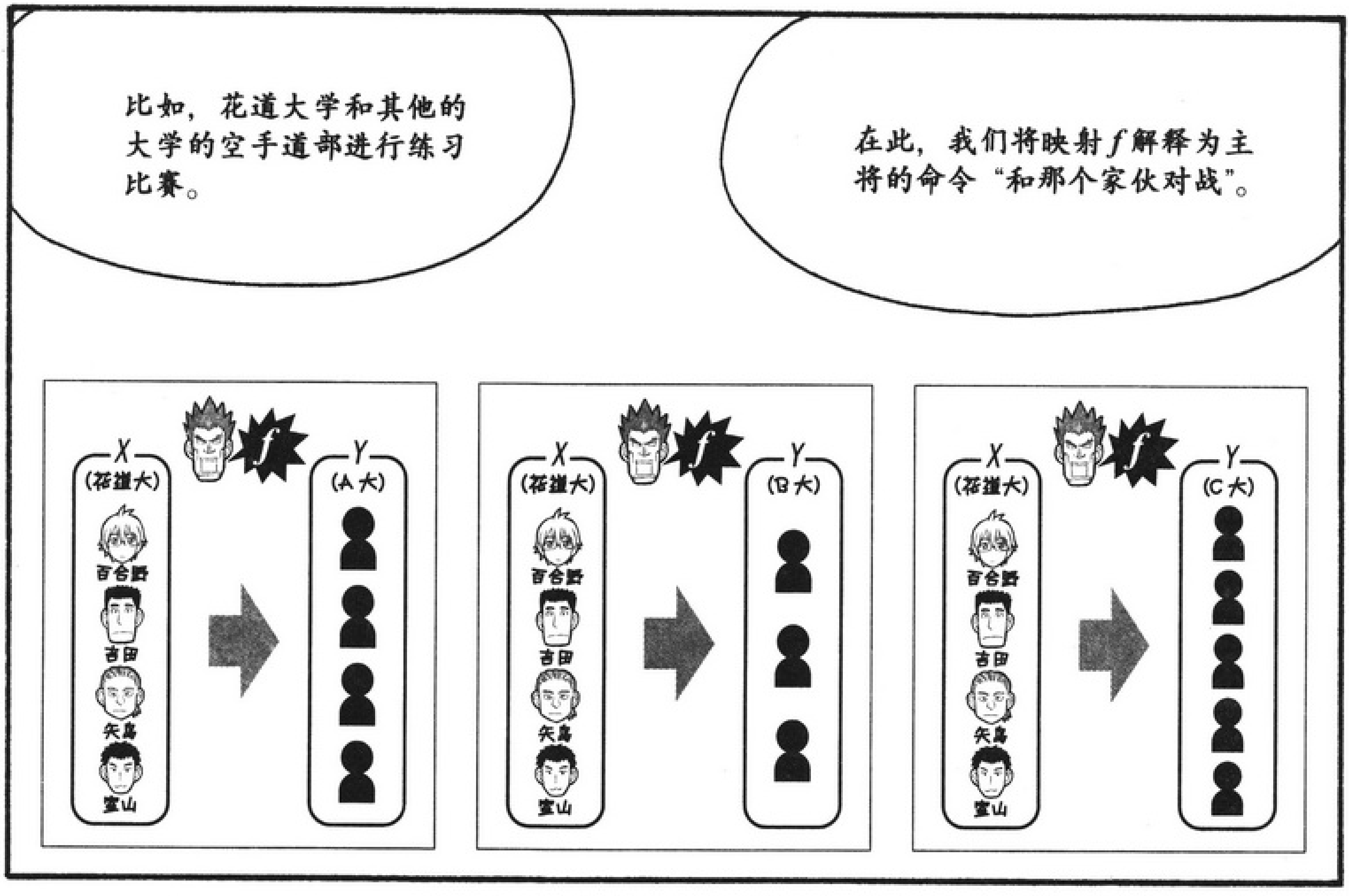
但是一般都是

$$\{f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_n)\}\subset Y$$

4.4 满射、单射、满单射



接下来，我们要讲解满射、单射和满单射。
好的。

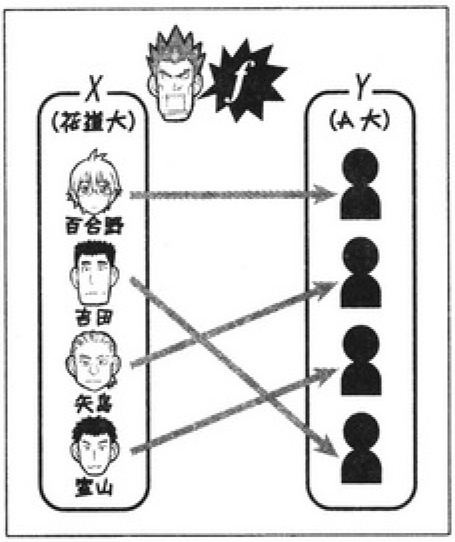


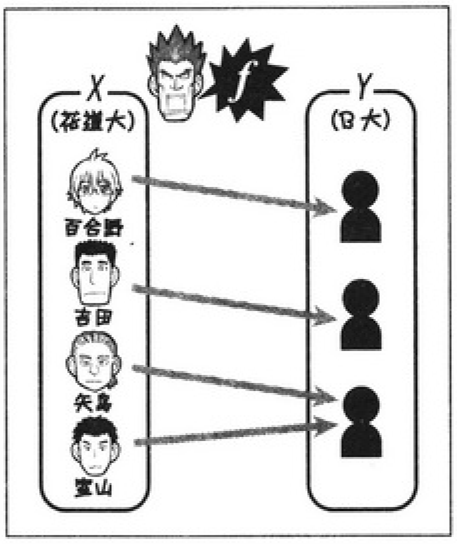
比如，花道大学和其他的大学的空手道部进行练习比赛。
在此，我们将映射f解释为主将的命令“和那个家伙对战”。
X
(花道大)
百合野
吉田
矢島
室山
f
Y
(A大)
(B大)
(C大)



百合野，你就要参加比赛了？
啊，不，这只是举个例子而已。
现在还只处于基础练习阶段。

■ 满　射

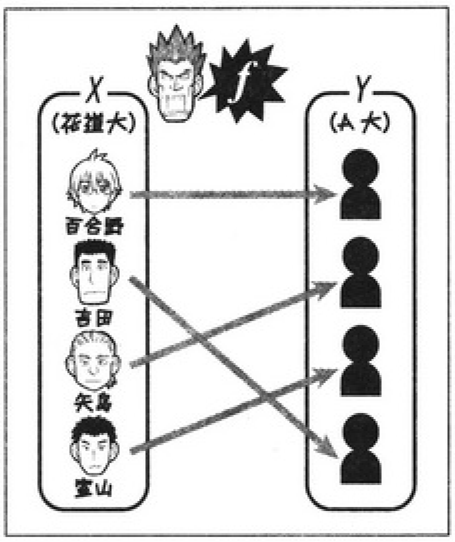


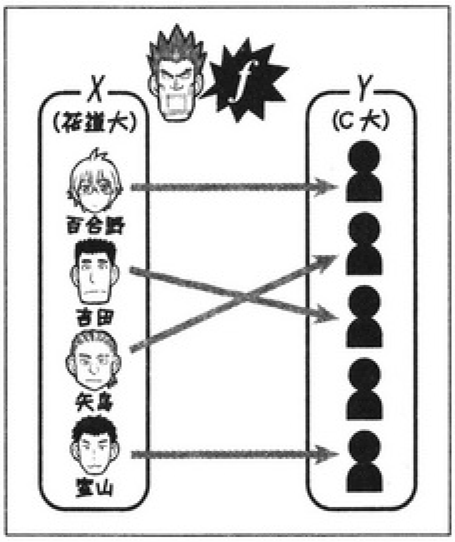


如左边的两个例子，当“映射 f 的值域”等于“集合 Y”时，就可以说“映射 f 是满射”，满射也称作向上的映射。



■ 单　射

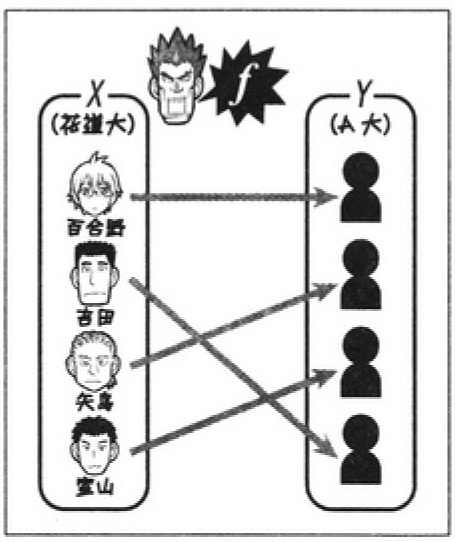




如左边的两个例子，若 $x_i \neq x_j$，则 $f(x_i) \neq f(x_j)$，此时“映射 f 就是单射”。单射也被称作一对一的映射。



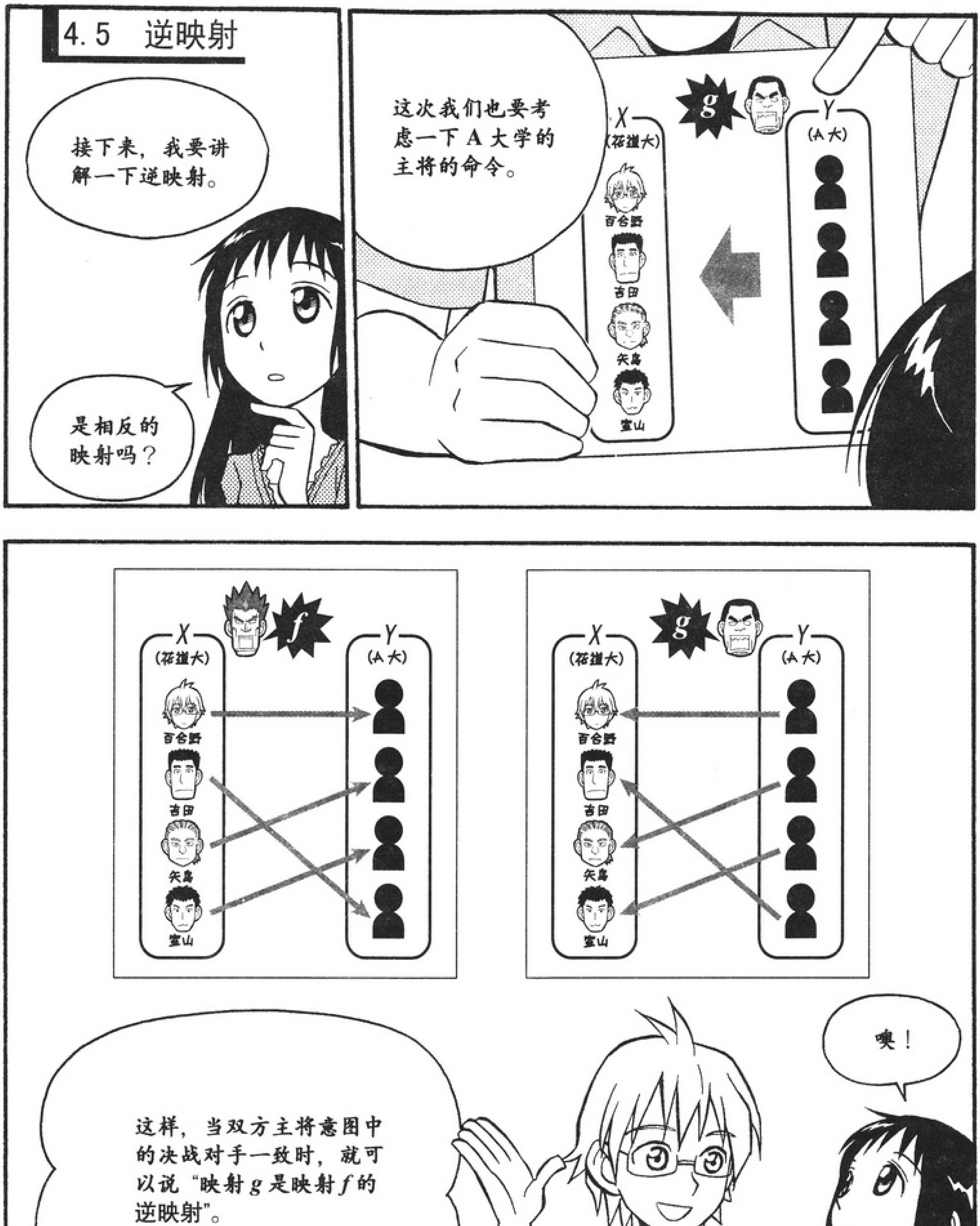
■ 满单射



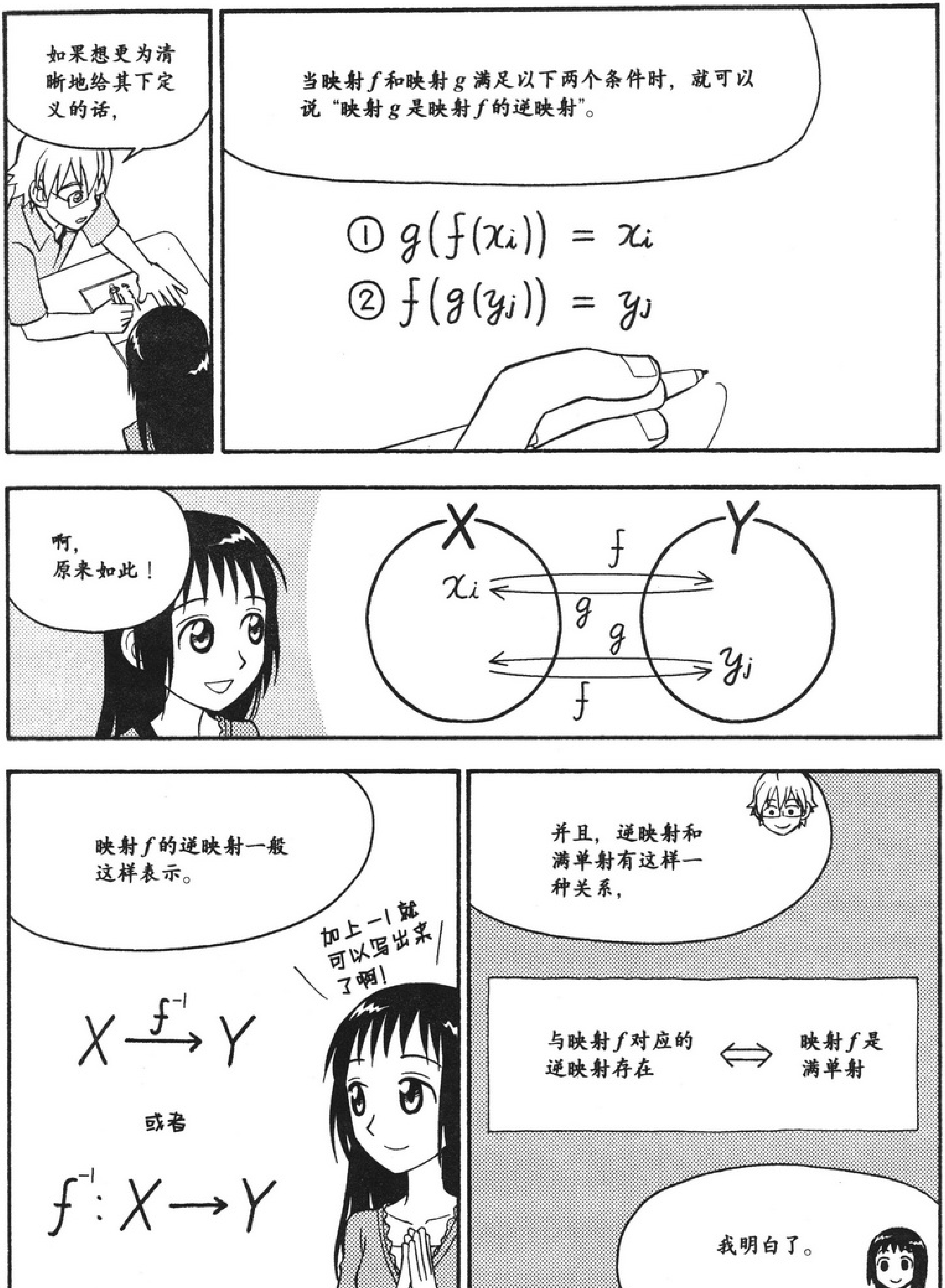
如左边的例子，当映射 f 既是满射又是单射时，就可以称“映射 f 是满单射”。满单射也被称作双射。



4.5 逆映射



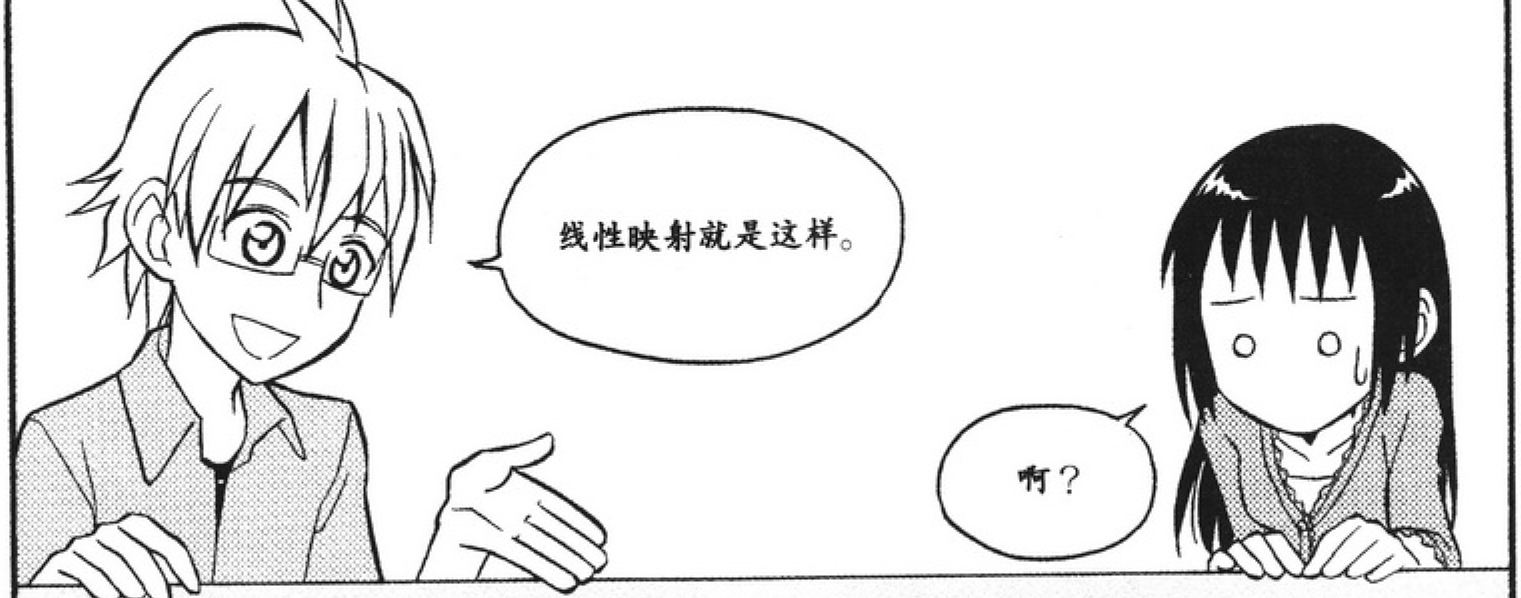
接下来，我要讲解一下逆映射。
是相反的映射吗？
这次我们也要考虑一下A大学的主将的命令。
g
X
(花道大)
百合野
吉田
矢島
室山
Y
(A大)
f
这样，当双方主将意图中的决战对手一致时，就可以说“映射g是映射f的逆映射”。
噢！


如果想更为清晰地给其下定义的话，
当映射f和映射g满足以下两个条件时，就可以说“映射g是映射f的逆映射”。
① $g(f(x_i)) = x_i$
② $f(g(y_j)) = y_j$
啊，原来如此！
X
Y
f
x_i
g
g
y_j
f
映射f的逆映射一般这样表示。
加上-1就可以写出来了啊！
$X \xrightarrow{f^{-1}} Y$
或者
$f^{-1}: X \to Y$
并且，逆映射和满单射有这样一种关系，
与映射f对应的逆映射存在 $\Longleftrightarrow$ 映射f是满单射
我明白了。

4.6 线性映射



那么，我们最后来讲一下线性映射。
线性映射？
马上就要讲解了吗？
基础
基础知识
准备
矩阵
正题
线性映射
是啊，这是正题之一啊！
这只是一个大致的介绍，
正式的讲解在后面的“正题”部分。
不过，因为它的概念非常抽象，所以还是请你做好思想准备。
好的！

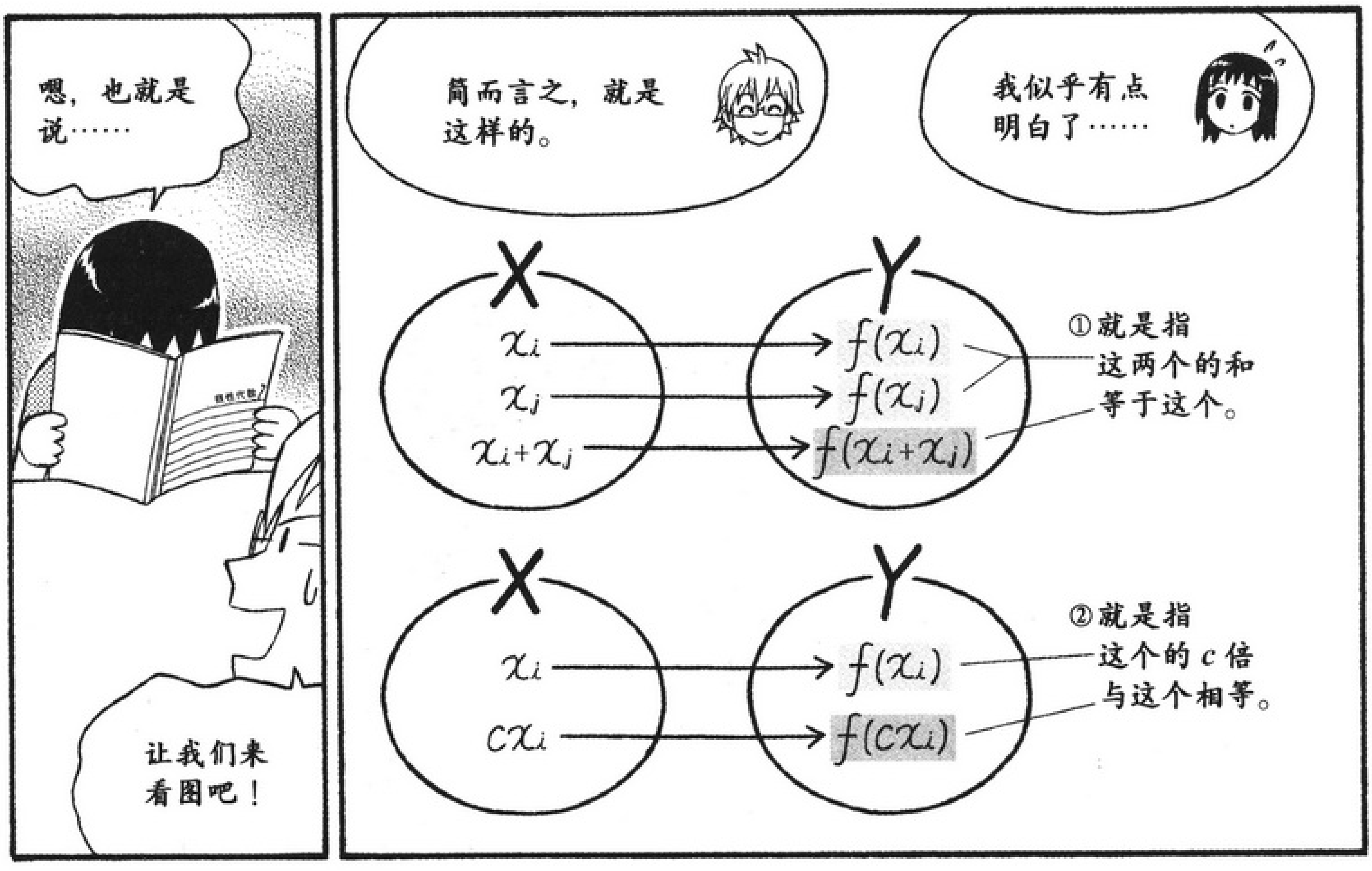


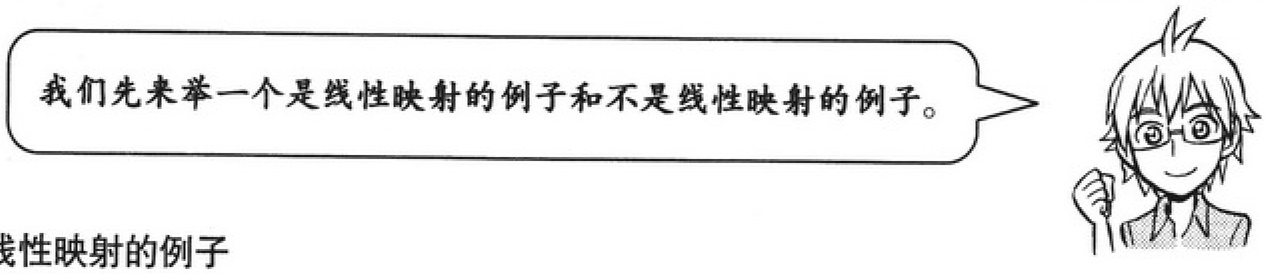
线性映射

假设 x_i 和 x_j 是 X 的任意元素，c 为任意实数，f 为“从 X 到 Y 的映射”。
当映射 f 满足以下两个条件时，就可以说“映射 f 是从 X 到 Y 的线性映射”。

① $f(x_i)+f(x_j)=f(x_i+x_j)$

② $cf(x_i)=f(cx_i)$





■ 线性映射的例子

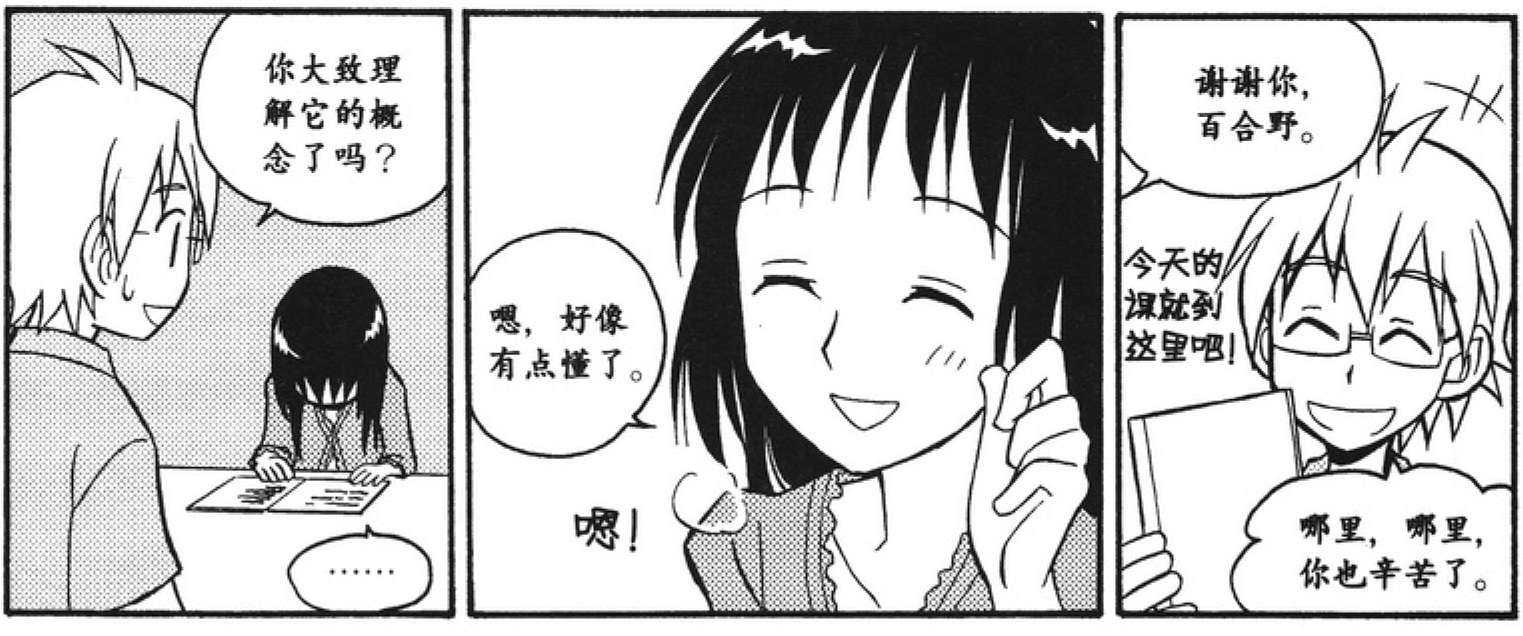
$f(x)=2x$ 这一映射就是线性映射。为什么呢？因为从下表中可以得知它满足①和②的条件。

①的证明	$\begin{cases} f(x_i)+f(x_j)=2x_i+2x_j \\ f(x_i+x_j)=2(x_i+x_j)=2x_i+2x_j \end{cases}$
②的证明	$\begin{cases} cf(x_i)=c(2x_i)=2cx_i \\ f(cx_i)=2(cx_i)=2cx_i \end{cases}$

■ 不是线性映射的例子

$f(x)=2x-1$ 这一映射不是线性映射。为什么呢？因为从下表中可以得知它不满足①和②的条件。

①的证明	$\begin{cases} f(x_i)=f(x_j)=2x_i-1+2x_j-1=2x_i+2x_j-2 \\ f(x_i+x_j)=2(x_i+x_j)-1=2x_i+2x_j-1 \end{cases}$
②的证明	$\begin{cases} cf(x_i)=c(2x_i-1)=2cx_i-c \\ f(cx_i)=2(cx_i)-1=2cx_i-1 \end{cases}$

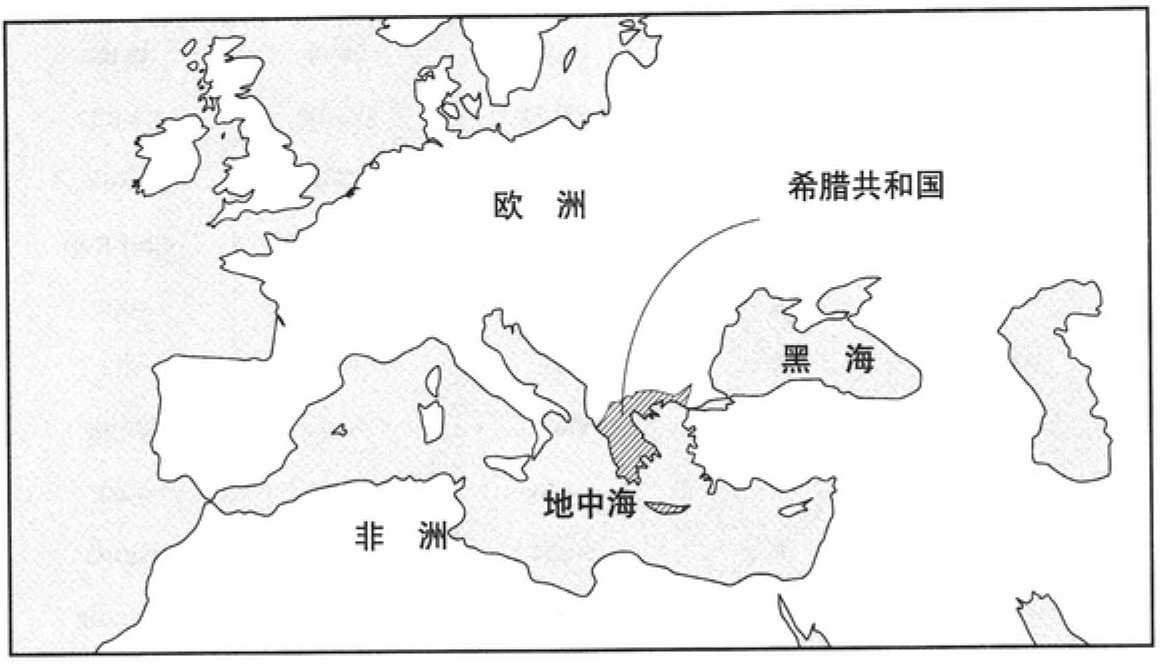



百合野！
嗯……
平时你都是在学校食堂吃午饭吗？
差不多吧，反正我也一个人住。
那下次我来给你做便当吧，就算是当作你给我上课的答谢吧。
ん!?
不，还是不要了，因为一之濑主将也在指导我练习空手道啊。
会给你添麻烦是吗？


不，
我非常高兴，
但是……
嗯……
那可以吗？
便当……
是的。
我经常给我哥哥
做"体力便当"。
是吗？那你哥哥
一定很高兴吧。

✱ 5. 希腊文字 ✱

在数学里面经常用到像 α、θ 这样的希腊文字。所谓希腊文字，就如它的名字一样，是希腊共和国使用的文字。



我把希腊文字总结在了下表中。虽然没有必要去全部记住，但是借此机会也可以了解一下。读法①是现代希腊所采取的读法[1]，读法②是古代希腊所采取的读法，读法③是日本理工科类图中采取的读法。

大写	小写	读法 ①	读法 ②	读法 ③
Α	α	arufa	arufa	arufa
Β	β	vita	beita	beita
Γ	γ	gama	ganma	ganma
Δ	δ	zeruta	deruta	deruta
Ε	ε	epujinon	epujinon	epujinon
Ζ	ζ	jita	zeita	zeita
Η	η	ita	iita	iita
Θ	θ	shita	shiita	shiita
Ι	ι	yota	iota	iota
Κ	κ	kapa	kappa	kappa
Λ	λ	rumuza	ramuda	ramuda
Μ	μ	mi	myuu	myuu
Ν	ν	ni	nyuu	nyuu
Ξ	ξ	keshi	gezai	gezai
Ο	o	omikuron	omikuron	omikuron
Π	π	pi	pai	pai
Ρ	ρ	ro	rou	rou
Σ	σ	shiguma	shiguma	shiguma
Τ	τ	tafu	tafu	tafu
Υ	υ	ipushiron	ipushiron	ipushiron
Φ	φ	fi	fai	fai
Χ	χ	hi	kai	kai
Ψ	ψ	pushi	pusai	pusai
Ω	ω	omega	omega	omega

1. 选自木户雅子《希腊语》（国际语学社出版）。

✱ 6. 理科特有的说法 ✱

在理科的世界里，有时候会用一般人不太使用的说法来表达

- 加法
- 减法
- 乘法
- 除法

运算。我将其归纳在了下面的表里。或许很多人会对“理科特有的说法②”有些看法，但还是请慢慢习惯这种说法。

	普通的说法	理科特有的说法①	理科特有的说法②
6+2=8	6 加上 2 等于 8	6 与 2 的和是 8	把 6 与 2 相加，和是 8
6−2=4	6 减去 2 等于 4	6 与 2 的差是 4	把 6 与 2 相减，差是 4
6×2=12	6 乘以 2 等于 12	6 与 2 的积是 12	把 6 与 2 相乘，积是 12
6÷2=3	6 除以 2 等于 3	6 与 2 的商是 3	把 6 与 2 相除，商是 3

＊7. 排列组合＊

让我们通过具体事例来讲解一下排列组合的概念。

下面我们将按照"?问题→思路→!解答"这一流程来展开。

?问题

木村某天买了一张CD，其中收录了A，B，C，D，E，F，G这7首曲子。因为这些曲子都非常好听，所以和岛越约好明天出去兜风时在车上欣赏。但是，他认为如果将CD的全部曲子都让岛越听的话，有点将自己的兴趣爱好强加给别人的感觉，所以决定从这些曲子中挑选出3首曲子做成CD。

（1）请求出"从7首曲子中选出3首曲子的方法的种数"。

（2）请求出"将选出的3首曲子排序的种数"。

（3）请求出"从7首曲子中选出3首曲子后制作成CD的种数"。

思路

从7首曲子中选出3首曲子后，制作成CD这一行为与从7首曲子中选出3首曲子，然后确定这3首曲子的顺序是同一个意思。因此，"从7首曲子中选出3首曲子后制作成CD的种数"即（3）的解是

从7首曲子中选出3首曲子的方法的种数 × 将选出的3首曲子排序的种数

（1）的解　　（2）的解

解答

（1）从 7 首曲子中选出 3 首曲子的方法的种数

从 7 首曲子中选出 3 首曲子的方法的种数如下表就可以明白是 35 种。

第 1 种	A，B，C
第 2 种	A，B，D
第 3 种	A，B，E
第 4 种	A，B，F
第 5 种	A，B，G
第 6 种	A，C，D
第 7 种	A，C，E
第 8 种	A，C，F
第 9 种	A，C，G
第 10 种	A，D，E
第 11 种	A，D，F
第 12 种	A，D，G
第 13 种	A，E，F
第 14 种	A，E，G
第 15 种	A，F，G

第 16 种	B，C，D
第 17 种	B，C，E
第 18 种	B，C，F
第 19 种	B，C，G
第 20 种	B，D，E
第 21 种	B，D，F
第 22 种	B，D，G
第 23 种	B，E，F
第 24 种	B，E，G
第 25 种	B，F，G
第 26 种	C，D，E
第 27 种	C，D，F
第 28 种	C，D，G
第 29 种	C，E，F
第 30 种	C，E，G
第 31 种	C，F，G
第 32 种	D，E，F
第 33 种	D，E，G
第 34 种	D，F，G
第 35 种	E，F，G

我们把“从 n 个中挑选 r 个的个数”叫做“**组合的个数**”。
“组合的个数一般表示为 C_n^r。因此为 $C_7^3=35$。

（2）选出的 3 首曲子排序的种数

比如选出的是 A、B、C 这 3 首曲子，那么曲子的顺序应该是以下 6 种：

第一曲	→	第二曲	→	第三曲
A	→	B	→	C
A	→	C	→	B
B	→	A	→	C
B	→	C	→	A
C	→	A	→	B
C	→	B	→	A

或者假如选出的曲子为 B，E，G 这 3 首曲子，那么曲子的顺序应该是以下 6 种：

第一曲	→	第二曲	→	第三曲
B	→	E	→	G
B	→	G	→	E
E	→	B	→	G
E	→	G	→	B
G	→	E	→	B
G	→	B	→	E

根据这两个例子，我们可以看出无论选哪 3 首曲子，每一组选出的 3 首曲子排列的种数都是 6 种。

选出的 3 首曲子排序的种数为 6 种可以改写成 $3\times2\times1$。这并不是任意改写的。根据以下所示的①，②，③的值的乘积，才可以写成 $3\times2\times1$。

① 第一曲可以在已经选好的 3 首曲子中选择；

② 第二曲可以在除去选过的第一曲以外剩下的 2 首曲子中选择；

③ 第三曲可以在除去选过的第一曲、第二曲以外剩下的 1 首曲子中选择。

（3）从 7 首曲子中选出 3 首曲子后制作 CD 的种数

“从 7 首曲子中选出 3 首曲子后制作 CD 的种数”是

从 7 首曲子中选出 3 首曲子后制作 CD 的种数

= 从 7 首曲子中选出 3 首曲子的方法的种数 × 将选出的 3 首曲子排序的种数

$=C_7^3\times 6$

$=35\times 6$

$=210$

“从 n 个事物中选择 r 个事物，然后再将选好的 r 个事物按照顺序排列的种数”被称作“排列的个数”。

“排列的个数”一般表示为 P_n^r。因此，

$$P_7^3=210$$

下表表示了“从A，B，C，D，E，F，G这7首曲子中选出3首制作成的CD的种类”的具体情况。

	第一曲	→	第二曲	→	第三曲
种类 1	A	→	B	→	C
种类 2	A	→	B	→	D
种类 3	A	→	B	→	E
⋮	⋮		⋮		⋮
种类 30	A	→	G	→	F
种类 31	B	→	A	→	C
⋮	⋮		⋮		⋮
种类 60	B	→	G	→	F
种类 61	C	→	A	→	B
⋮	⋮		⋮		⋮
种类 90	C	→	G	→	F
种类 91	D	→	A	→	B
⋮	⋮		⋮		⋮
种类 120	D	→	G	→	F
种类 121	E	→	A	→	B
⋮	⋮		⋮		⋮
种类 150	E	→	G	→	F
种类 151	F	→	A	→	B
⋮	⋮		⋮		⋮
种类 180	F	→	G	→	E
种类 181	G	→	A	→	B
⋮	⋮		⋮		⋮
种类 209	G	→	E	→	F
种类 210	G	→	F	→	E

“从7首曲子中选出3首制作成的CD的种类数”210种可以改写成7×6×5。这并不是任意改写的。根据以下所示的①，②，③的值的乘积，才可以写成7×6×5。

① 第一曲可以在A，B，C，D，E，F，G这7首曲子中选择；

② 第二曲可以在除去选过的第一曲以外剩下的6首曲子中选择；

③ 第三曲可以在除去选过的第一曲、第二曲以外剩下的5首曲子中选择。

"从 7 首曲子中选出 3 首制作成的 CD 的种类的个数" "$C_7^3\times6=210$" 可以写成

$$C_7^3\times6\qquad=210$$

$$C_7^3\times(3\times2\times1)=7\times6\times5$$

$$C_7^3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}\times\frac{4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1}$$

即 "从 n 个事物中选择 r 个事物的方法的个数" C_n^r 可以写成

$$C_n^r=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-(r-1))}{r\times(r-1)\times\cdots\times1}$$

$$=\frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-(r-1))}{r\times(r-1)\times\cdots\times1}\times\frac{(n-r)\times(n-(r+1))\times\cdots\times1}{(n-r)\times(n-(r+1))\times\cdots\times1}$$

请好好记住。

另外，有时也

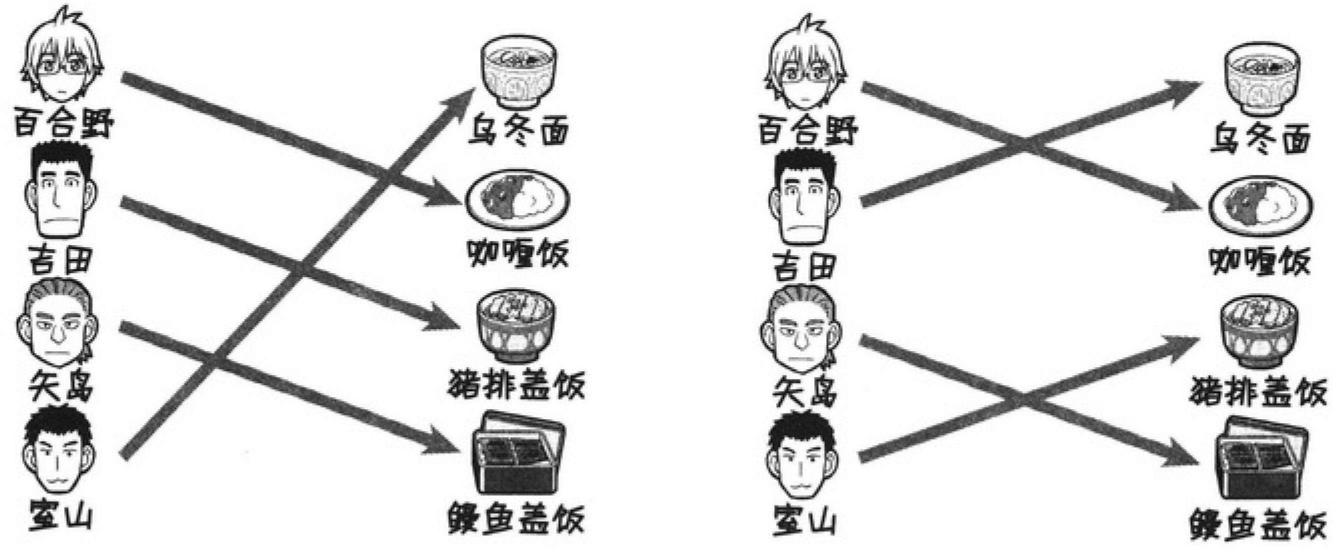
- 把 $3\times2\times1$ 表示为 $3!$
- 把 $7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$ 表示为 $7!$

有时 C_n^r 可以表示为

$$C_n^r=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

✻ 8. 主将的命令和映射 ✻

第 41 和第 42 页中解说过“全部点最便宜的东西”、“全部点不同的东西”、“全部点最喜欢吃的东西”这些命令都是映射。严格地说，第 2 个命令“全部点不同的东西”不能算是映射。因为这个命令与其他的两个命令不同，它有可能产生以下几种结果。



换句话说，会产生多种结果的命令只不过是单纯的命令，不能说是映射。

第3章

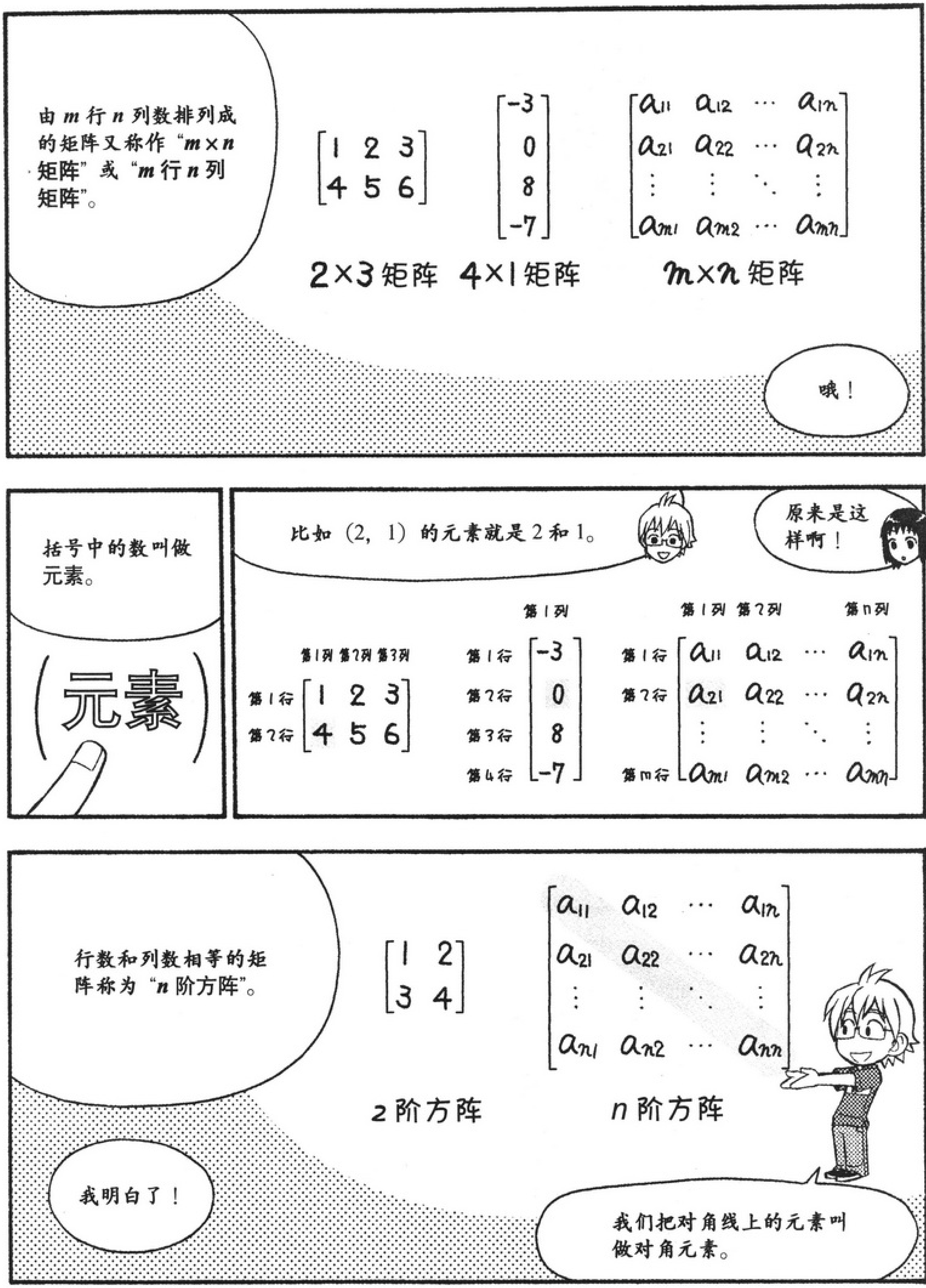
矩阵



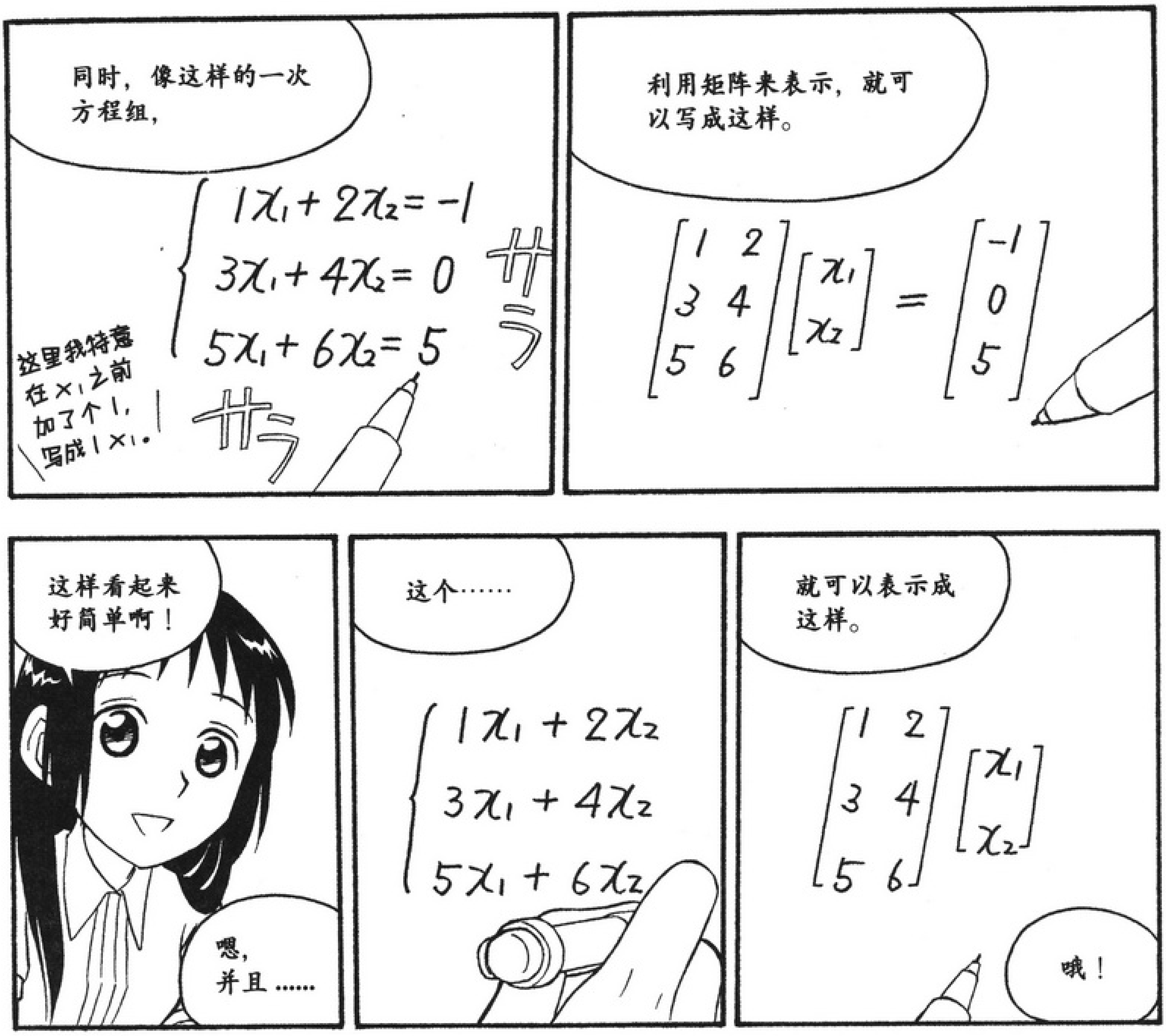

嗨!
嗨!
用力!
百合野!
カッ
用拳击打!
腰部用力!
嗨!
本来以为他马上就会放弃的。
没想到他这么有毅力。
フフン


どーん
辛苦了，百合野！
哇，真棒啊！
我可以吃这个吗？
じーん
当然可以！
谢谢！那我就不客气了！
ガツガツ
好吃！
真好吃！
太好了！
谢谢你，美纱！
不用客气！


我吃饱了！
多亏了你，我现在又精神百倍了。我们马上开始上课吧！
好的，那就拜托你了。
今天咱们讲这个。
课程结构
基础
基础知识
准备
矩阵
向量
正题
线性映射
特征值和特
在线性代数中会经常出现矩阵，让我们一起来好好学习吧！
今天的课程基本上也不太难，
只有最后要讲解的逆矩阵有点复杂，你要好好努力哦！
好的！
1. 矩 阵
第1列 第2列 第n列
第1行
第2行
第m行
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
像这样，将数排列成m行n列后，然后用括号将它围起来，我们将这种形式的组合叫做矩阵。
同时我们将这个叫做行标和列标。


由m行n列数排列成的矩阵又称作“m×n矩阵”或“m行n列矩阵”。
2×3矩阵
4×1矩阵
m×n矩阵
哦！
括号中的数叫做元素。
元素
比如（2，1）的元素就是2和1。
原来是这样啊！
第1列 第2列 第3列
第1行
第2行
第1列
第1行
第2行
第3行
第4行
第1列 第2列 第n列
第1行
第2行
第m行
行数和列数相等的矩阵称为“n阶方阵”。
2阶方阵
n阶方阵
我明白了！
我们把对角线上的元素叫做对角元素。


矩阵的概念好奇怪哦！这是谁想出来的？
啊
这个我也不太清楚。
不管这个概念从哪里来，反正矩阵用处很多。
为什么呢？
因为它有这些优点。
· 能够将一次方程组很清楚地表达出来。
· 可以减轻教师在黑板上书写的辛苦。
· 可以减少书籍的用纸量。
简而言之，就是说它很方便吗？
是的。

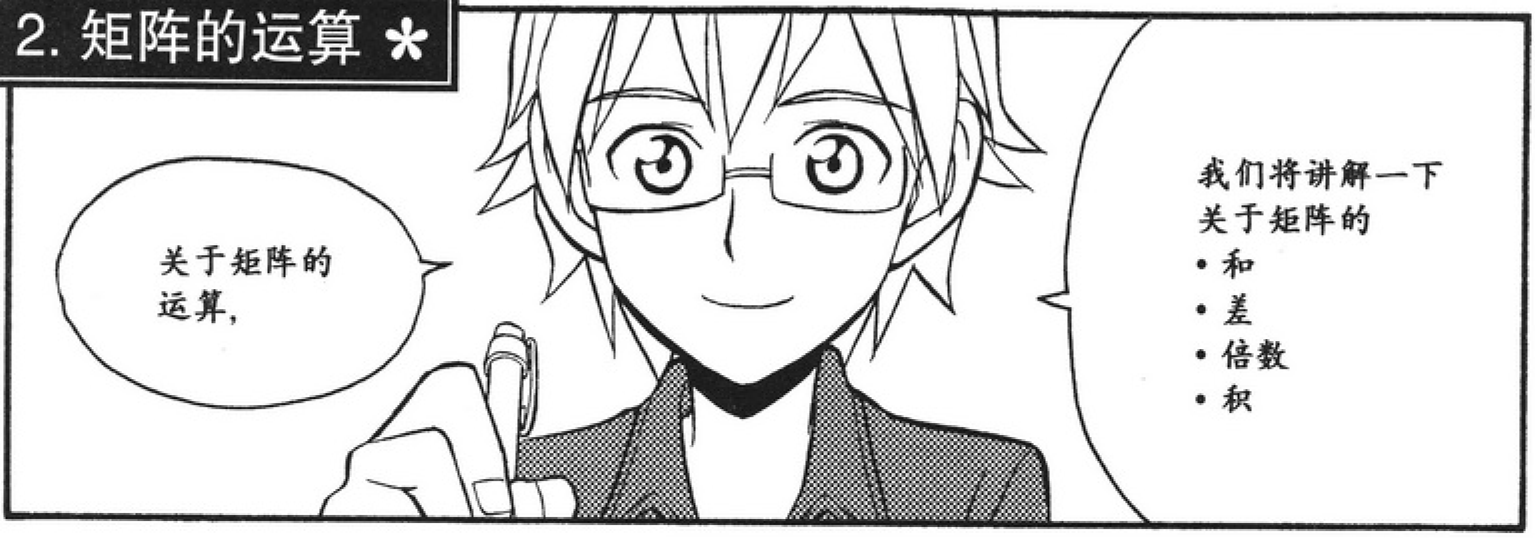


用矩阵表示

• 可以将 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ 表示为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

• 可以将 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$ 表示为 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

✽ 2. 矩阵的运算 ✽



■ 和

比如，3×2 矩阵$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$与 3×2 矩阵$\begin{bmatrix}6 & 5\\4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$的和

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 5\\4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$$

等于$\begin{bmatrix}1+6 & 2+5\\3+4 & 4+3\\5+2 & 6+1\end{bmatrix}$



例

- $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 5\\4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+6 & 2+5\\3+4 & 4+3\\5+2 & 6+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 7\\7 & 7\\7 & 7\end{bmatrix}$
- $(10\quad 10)+(-3\quad -6)=[10+(-3)\quad 10+(-6)]=(7\quad 4)$
- $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10+(-3)\\10+(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$

■ 差



比如，3×2 矩阵$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$与 3×2 矩阵$\begin{bmatrix}6 & 5\\4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$的差

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 5\\4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}$$

等于$\begin{bmatrix}1-6 & 2-5\\3-4 & 4-3\\5-2 & 6-1\end{bmatrix}$

例

- $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 5\\4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-6 & 2-5\\3-4 & 4-3\\5-2 & 6-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -3\\-1 & 1\\3 & 5\end{bmatrix}$

- $(10\quad 10)-(-3\quad -6)=[10-(-3)\quad 10-(-6)]=(13\quad 16)$

- $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-3\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10-(-3)\\10-(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\16\end{bmatrix}$

■倍　数

比如，3×2 矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$ 的 10 倍

$$10\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$$

等于 $\begin{bmatrix}10\times1 & 10\times2\\10\times3 & 10\times4\\10\times5 & 10\times6\end{bmatrix}$



例

- $10\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\times1 & 10\times2\\10\times3 & 10\times4\\10\times5 & 10\times6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 20\\30 & 40\\50 & 60\end{bmatrix}$
- $2\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3 & 2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\end{pmatrix}$
- $2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times3\\2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$

■ 积



首先，请先记住“如果用矩阵来表示$\begin{cases}1x_1+2x_2\\3x_1+4x_2,\\5x_1+6x_2\end{cases}$

则结果应该是$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$”。

比如，3×2 矩阵$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}$与 2×2 矩阵$\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}$的积

$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}$$

与其说是积，还不如说只是同时将$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$

表示出来，即同时表示出$\begin{cases}1x_1+2x_2\\3x_1+4x_2\\5x_1+6x_2\end{cases}$与$\begin{cases}1y_1+2y_2\\3y_1+4y_2\\5y_1+6y_2\end{cases}$。

例

- $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x_1+2x_2&1y_1+2y_2\\3x_1+4x_2&3y_1+4y_2\\5x_1+6x_2&5y_1+6y_2\end{bmatrix}$



从以下例子可以看出，在将左边的矩阵与右边的矩阵交换相乘时，计算结果不一致。



$$\bullet \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\times3+(-3)\times1 & 8\times1+(-3)\times2 \\ 2\times3+1\times1 & 2\times1+1\times2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24-3 & 8-6 \\ 6+1 & 2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times8+1\times2 & 3\times(-3)+1\times1 \\ 1\times8+2\times2 & 1\times(-3)+2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24+2 & -9+1 \\ 8+4 & -3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & -8 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$$

请注意！

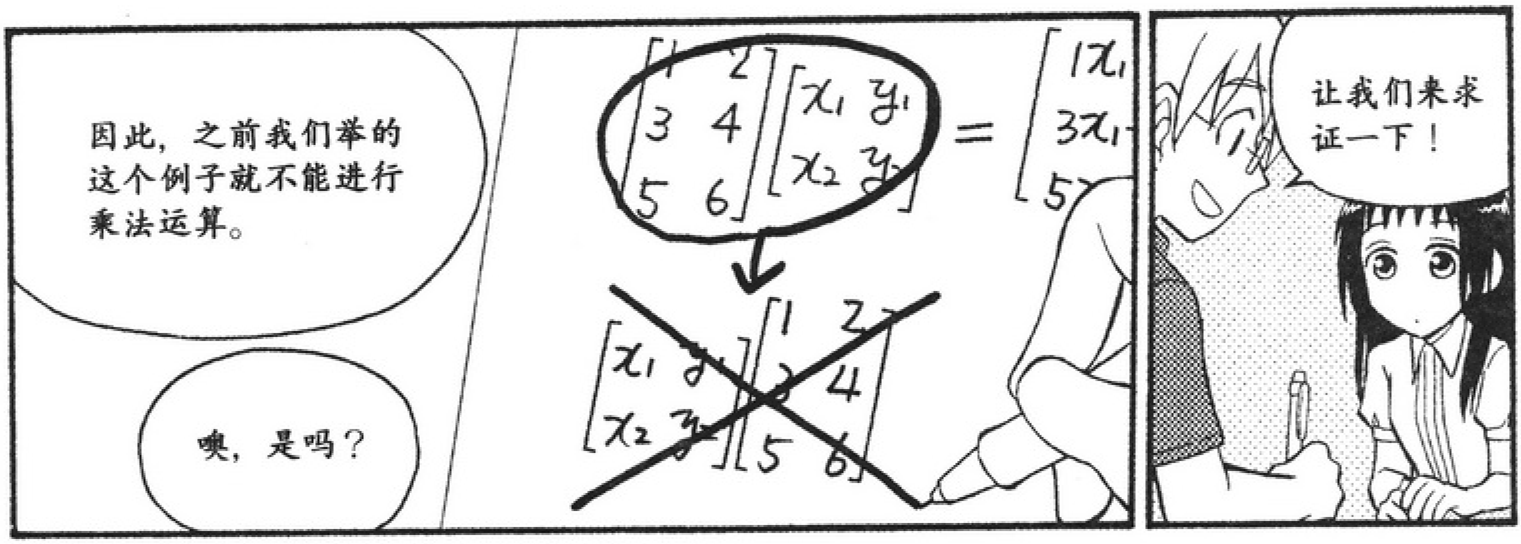


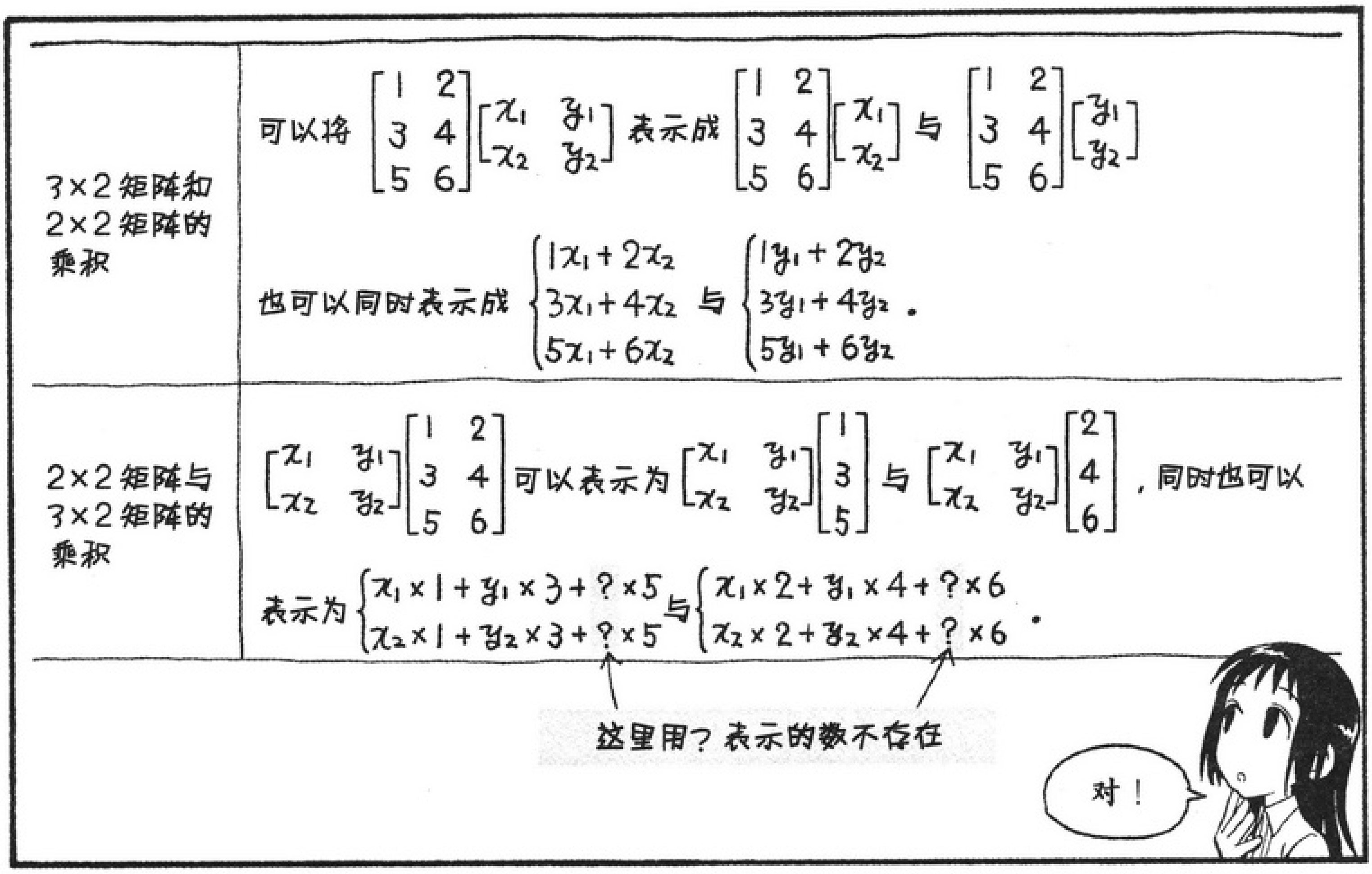
$$\begin{matrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{matrix}$$

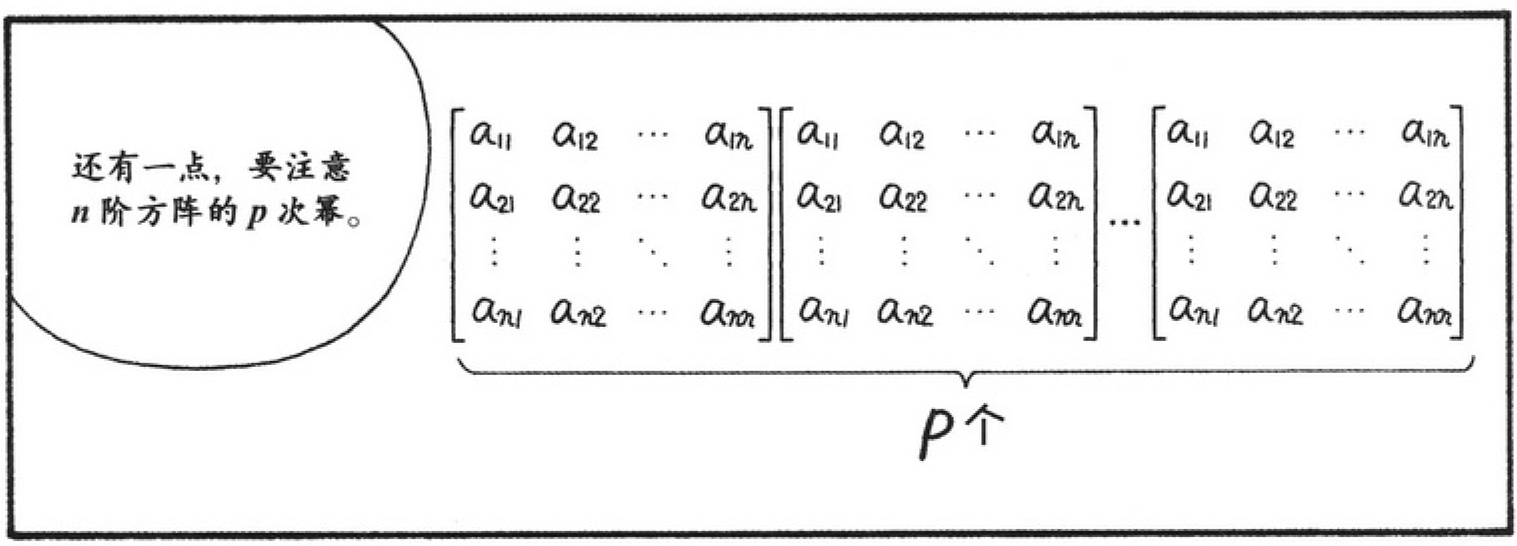
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

$m\times n$ 矩阵　　　$n\times p$ 矩阵

只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，两个矩阵才能进行乘法运算。


因此，之前我们举的这个例子就不能进行乘法运算。
噢，是吗？
$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}=$
$\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$
让我们来求证一下！


3×2矩阵和2×2矩阵的乘积
可以将 $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}$ 表示成 $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$
也可以同时表示成 $\begin{cases}1x_1+2x_2\\3x_1+4x_2\\5x_1+6x_2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}1y_1+2y_2\\3y_1+4y_2\\5y_1+6y_2\end{cases}$。
2×2矩阵与3×2矩阵的乘积
$\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$ 可以表示为 $\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$，同时也可以
表示为 $\begin{cases}x_1\times1+y_1\times3+?\times5\\x_2\times1+y_2\times3+?\times5\end{cases}$ 与 $\begin{cases}x_1\times2+y_1\times4+?\times6\\x_2\times2+y_2\times4+?\times6\end{cases}$。
这里用？表示的数不存在
对！


还有一点，要注意 n 阶方阵的 p 次幂。
$\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}}_{p个}$



$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^p$
可以这样表示！
也就是说……
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^2$
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^3$
是这样吗？
对，是这样。
嗯？3次方时是怎么计算的呢？
似乎有点乱。
哦，这个嘛……
从左边或者右边开始按顺序相乘就可以了。
从左边开始时是这样的。
这样就可以了啊！
$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times1+2\times3 & 1\times2+2\times4 \\ 3\times1+4\times3 & 3\times2+4\times4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

✱ 3. 特殊矩阵 ✱

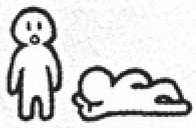


① 零矩阵　　0

所谓**零矩阵**，就是指所有的元素均为零的矩阵。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

② 转置矩阵



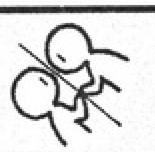
比如，3×2 矩阵$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\\5 & 6\end{bmatrix}$的**转置矩阵**就是 2×3 矩阵$\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\2 & 4 & 6\end{bmatrix}$。

也就是说，转置矩阵是指将 $m\times n$ 矩阵$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$的行和列交换后得到的 $n\times m$ 矩阵$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1}\\a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$。

$m\times n$ 矩阵$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$的转置矩阵可以表示成$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。



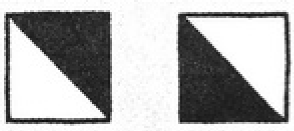
③ 对称矩阵



所谓**对称矩阵**，就是像$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 3 & 10 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{bmatrix}$一样，以对角元素为中心线对称的 n 阶方阵。

当然对称矩阵与它的转置矩阵是完全相同的矩阵。

④和⑤ 上三角矩阵和下三角矩阵



所谓**上三角矩阵**，就是像$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$一样，在对角元素左下角的所有元素均为 0 的 n 阶方阵。

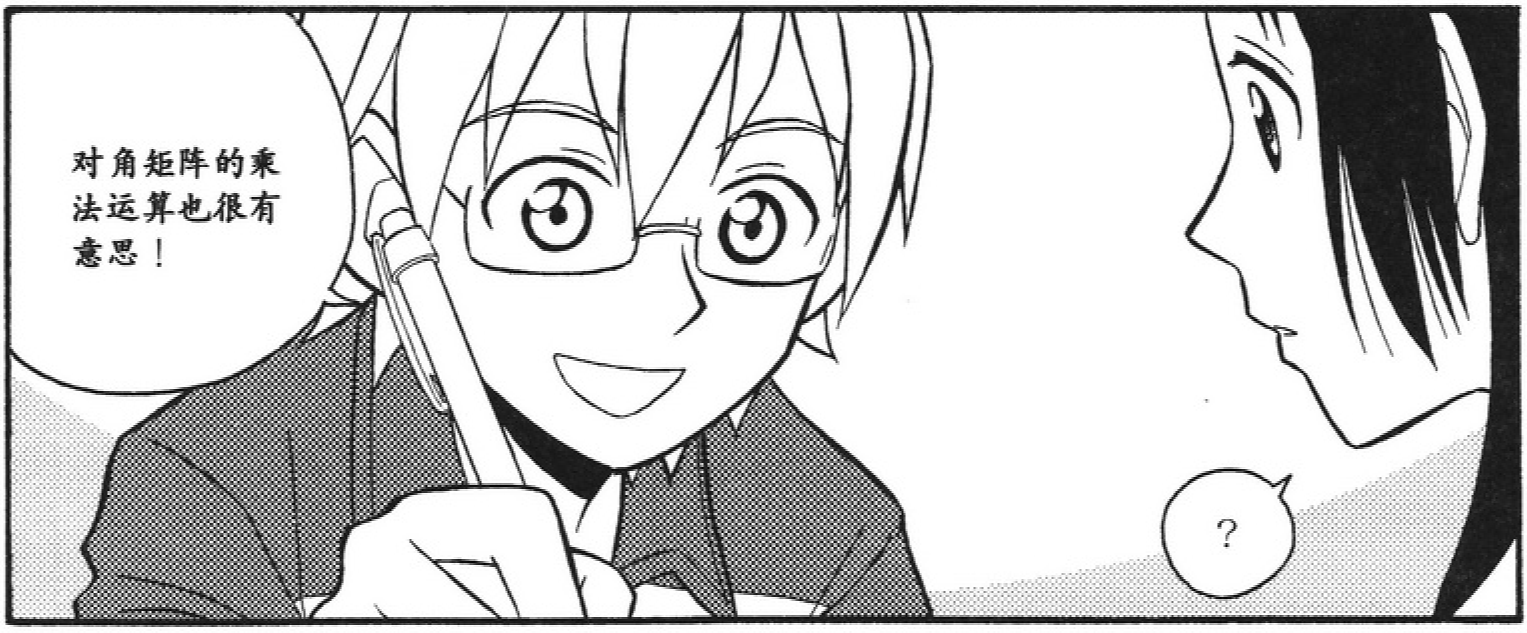
所谓**下三角矩阵**，就是像$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 3 & 0 \\ 7 & 9 & 10 & 4 \end{bmatrix}$一样，在对角元素右上角的所有元素均为 0 的 n 阶方阵。

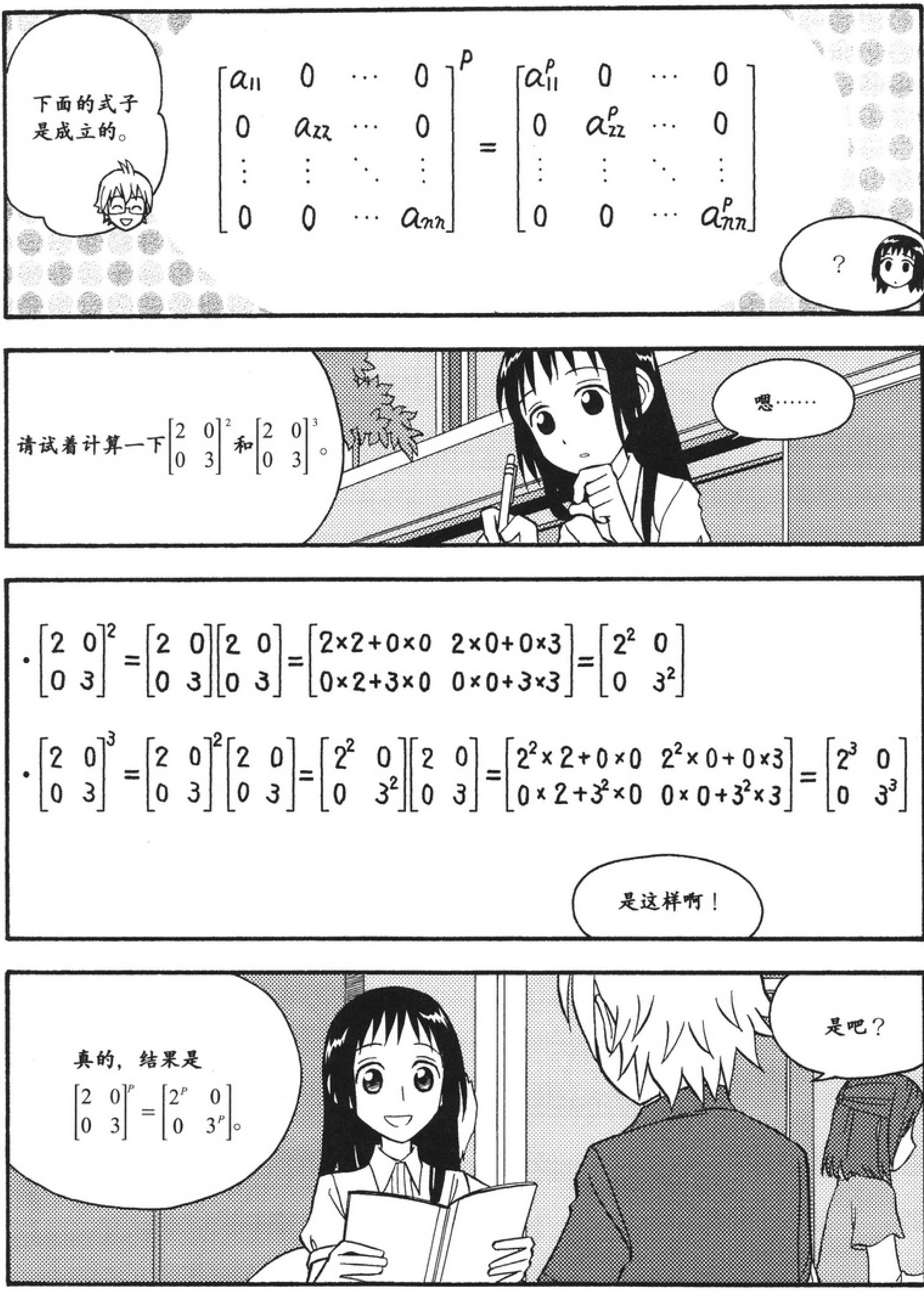
⑥ 对角矩阵

diag

所谓**对角矩阵**，就是像$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$那样，对角元素以外的元素均为 0 的 n 阶方阵。

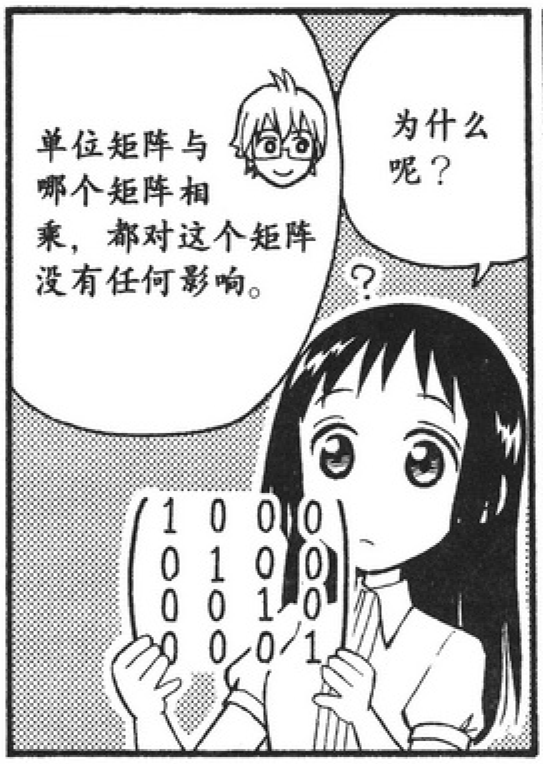
比如，对角矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}$，有时可以表示为 diag(1,2,3,4)。“diag”是表示对角线意思的 diagonal 的省略语。

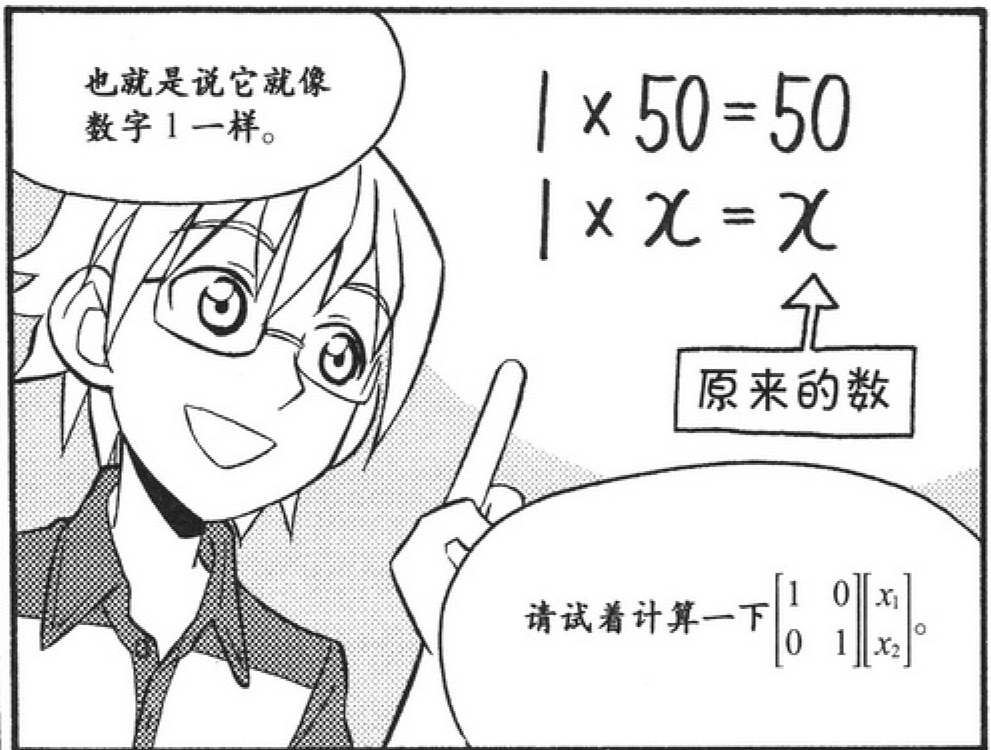


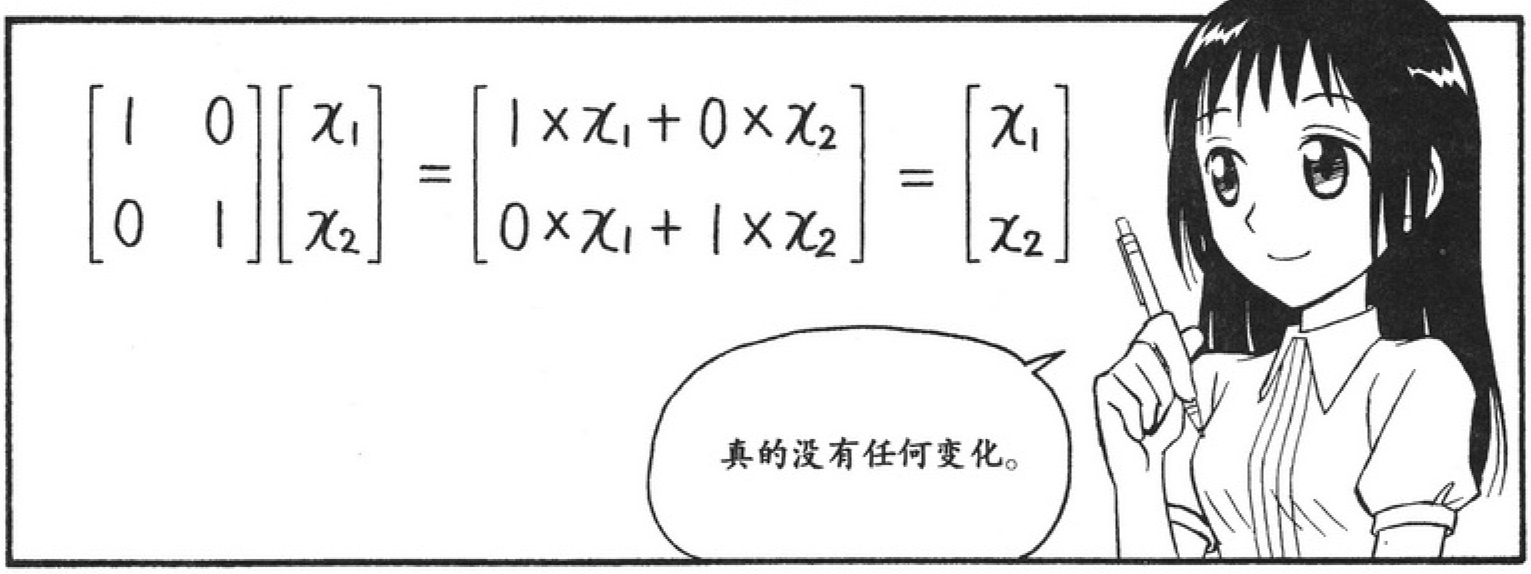

下面的式子是成立的。
$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} a_{11}^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^p \end{bmatrix}$$
？
请试着计算一下$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2$和$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3$。
嗯……
$$\cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times2+0\times0 & 2\times0+0\times3 \\ 0\times2+3\times0 & 0\times0+3\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$$
$$\cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2\times2+0\times0 & 2^2\times0+0\times3 \\ 0\times2+3^2\times0 & 0\times0+3^2\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$
是这样啊！
真的，结果是$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} 2^p & 0 \\ 0 & 3^p \end{bmatrix}$。
是吧？

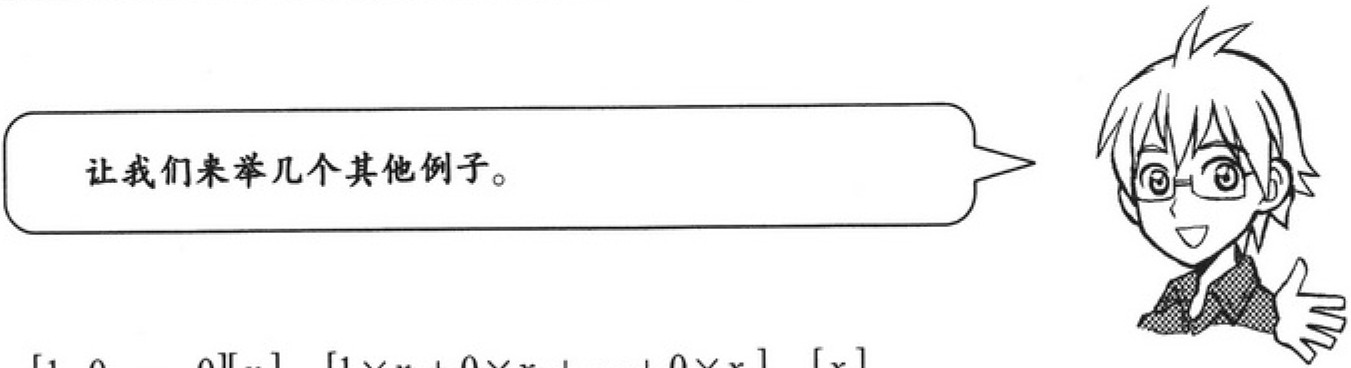
⑦ 单位矩阵

所谓**单位矩阵**，就是像$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$那样，对角元素均为 1，对角元素以外的其他元素全部为 0 的 n 阶方阵，也就是 diag（1，1，…1）。







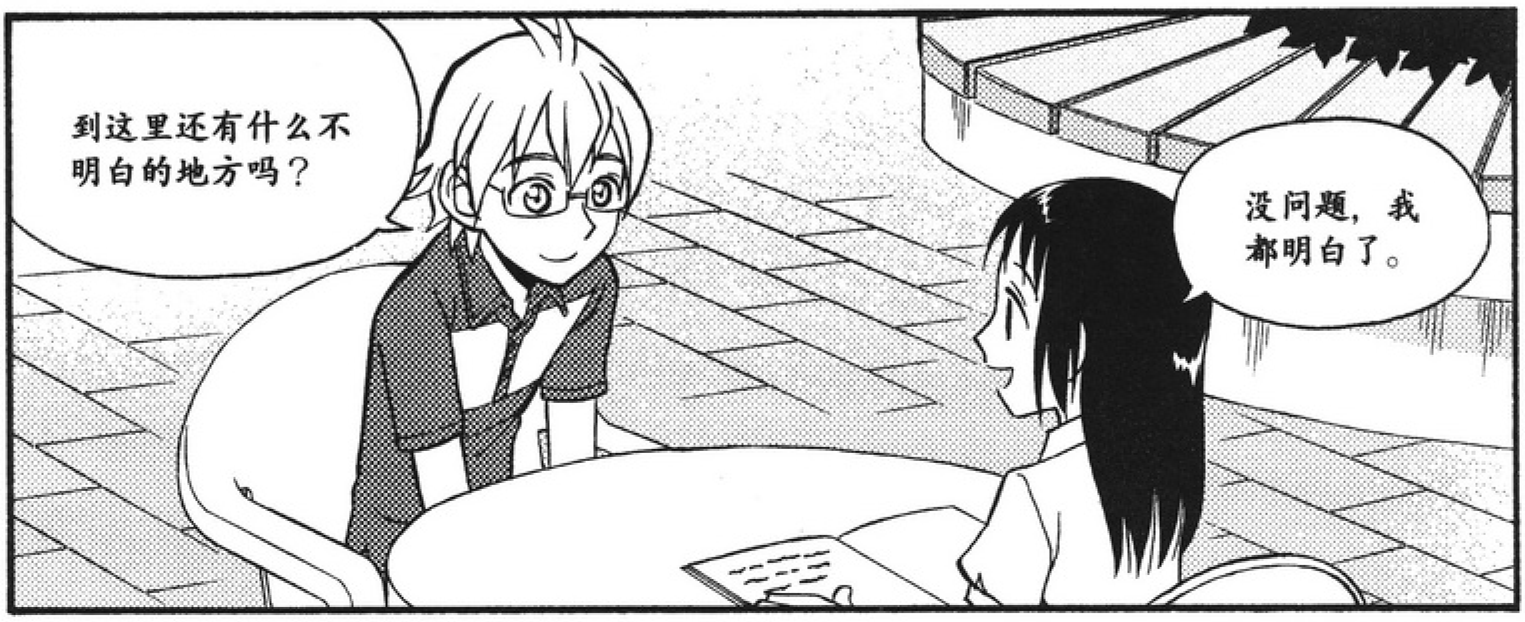


$$\bullet\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times x_1 + 0\times x_2 + \cdots + 0\times x_n \\ 0\times x_1 + 1\times x_2 + \cdots + 0\times x_n \\ \vdots \\ 0\times x_1 + 0\times x_2 + \cdots + 1\times x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\bullet\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times x_{11} + 0\times x_{12} & 1\times x_{21} + 0\times x_{22} & \cdots & 1\times x_{n1} + 0\times x_{n2} \\ 0\times x_{11} + 1\times x_{12} & 0\times x_{21} + 1\times x_{22} & \cdots & 0\times x_{n1} + 1\times x_{n2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{n2} \end{bmatrix}$$

$$\bullet\ \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}\times 1 + x_{12}\times 0 & x_{11}\times 0 + x_{12}\times 1 \\ x_{21}\times 1 + x_{22}\times 0 & x_{21}\times 0 + x_{12}\times 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1}\times 1 + x_{n2}\times 0 & x_{n1}\times 0 + x_{n2}\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} \end{bmatrix}$$




下面要讲的"逆矩阵"的内容很多，我们稍微休息一下吧。
好的！
不过你做的饭真的很好吃，你的厨艺不错啊！
我只是习惯了。
如果你觉得不错，我可以再带些过来。
我并不是……
不，没关系，你喜欢吃，我觉得很高兴。
就不要客气啦！
谢……谢谢！
那么，让我们再继续上课吧。
好的。

第4章

矩阵（续）

1. 逆矩阵
2. 逆矩阵的求解方法
3. 行列式
4. 行列式的值的求解方法
5. 利用代数余子式求解逆矩阵
6. 利用克莱姆法则解一次方程组



✻ 1. 逆矩阵 ✻



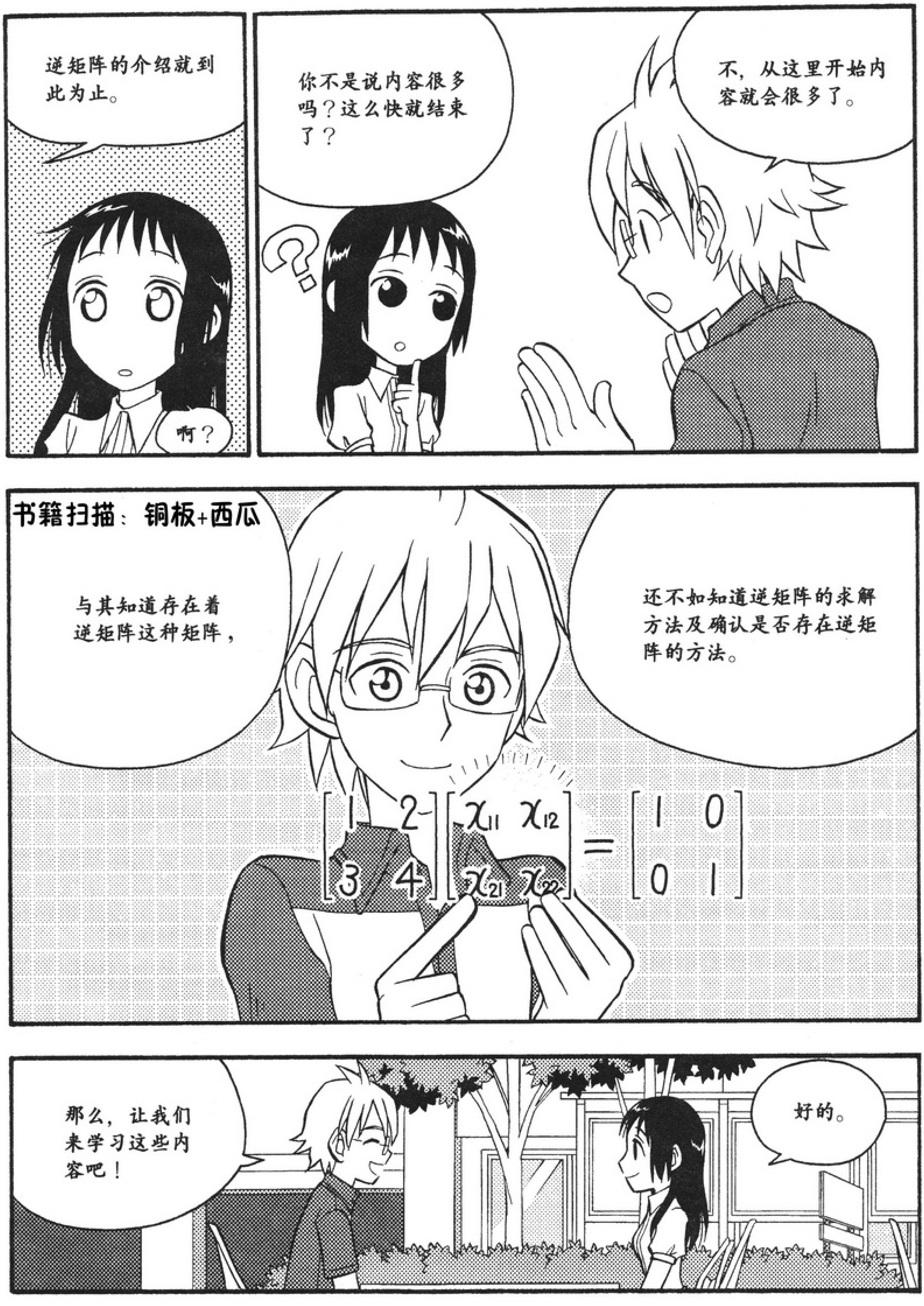
⑧ 逆矩阵

与 n 阶方阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的积等于单位矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$的 n 阶方阵就是$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的**逆矩阵**。更具体点的话，比如“2 阶方阵$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$的逆矩阵”就是使

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

成立的 2 阶方阵$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$。




逆矩阵的介绍就到此为止。
啊？
你不是说内容很多吗？这么快就结束了？
不，从这里开始内容就会很多了。
书籍扫描：铜板+西瓜
与其知道存在着逆矩阵这种矩阵，
还不如知道逆矩阵的求解方法及确认是否存在逆矩阵的方法。
$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
那么，让我们来学习这些内容吧！
好的。

2. 逆矩阵的求解方法



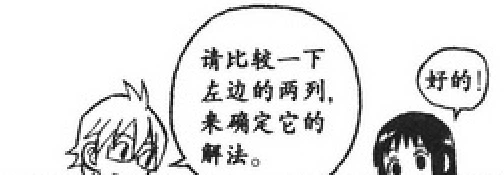
利用代数余子式法、
消元法。
求逆矩阵的方法有代数余子式法和消元法。
利用代数余子式的方法来计算逆矩阵非常麻烦，很不实用。
代数余子式法
所以只要老师不说“会在考试中出题”，就没有必要去记它。
好的。
与此相比，消元法要简单得多。
特意给它取了个名字叫“消元法”，这种方法比较简单。
さっ
さっ
今天我们只讲消元法。
那就拜托你了！
消元法可以用来解一次方程组，所以，让我们先通过一次方程组来看看它的解法。
好的。

问题

请解下面所示的一次方程组。

$$\begin{cases}3x_1 + 1x_2 = 1\\1x_1 + 2x_2 = 0\end{cases}$$

解答



普通解法	用矩阵表示左边的“普通解法”	消元法
$\begin{cases}3x_1 + 1x_2 = 1\\1x_1 + 2x_2 = 0\end{cases}$ 把上面的式子乘以 2	$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$
$\begin{cases}6x_1 + 2x_2 = 2\\1x_1 + 2x_2 = 0\end{cases}$ 用上面的式子减去下面的式子。	$\begin{bmatrix}6 & 2\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6 & 2 & 2\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$
$\begin{cases}5x_1 + 0x_2 = 2\\1x_1 + 2x_2 = 0\end{cases}$ 把下面的式子乘以 5。	$\begin{bmatrix}5 & 0\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & 0 & 2\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$
$\begin{cases}5x_1 + 0x_2 = 2\\5x_1 + 10x_2 = 0\end{cases}$ 用下面的式子减去上面的式子。	$\begin{bmatrix}5 & 0\\5 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & 0 & 2\\5 & 10 & 0\end{bmatrix}$
$\begin{cases}5x_1 + 0x_2 = 2\\0x_1 + 10x_2 = -2\end{cases}$ 把上面的式子除以 5，下面的式子除以 10。	$\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5 & 0 & 2\\0 & 10 & -2\end{bmatrix}$
$\begin{cases}1x_1 + 0x_2 = \frac{2}{5}\\0x_1 + 1x_2 = -\frac{1}{5}\end{cases}$ 方程的解就求出来了。	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\-\frac{1}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{2}{5}\\0 & 1 & -\frac{1}{5}\end{bmatrix}$





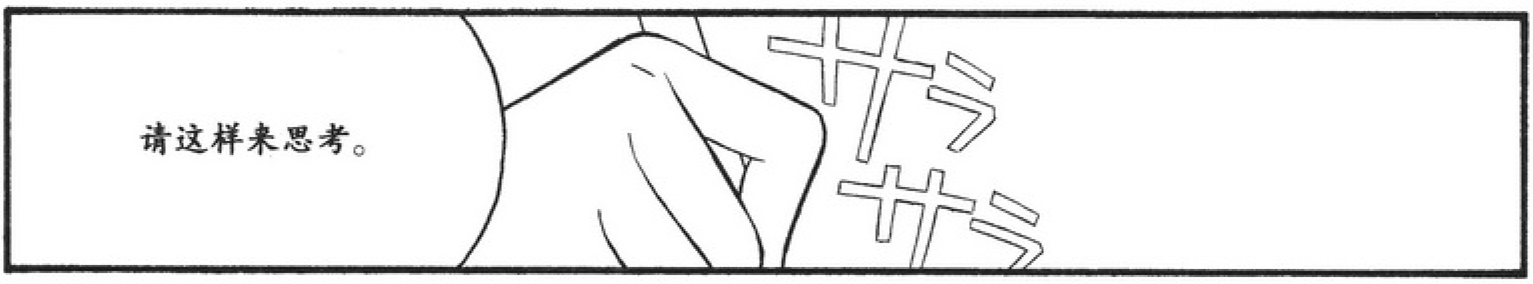






问题 请求出下列 2 阶方阵的逆矩阵。

$$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$$



求$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$的逆矩阵。

↓

求使$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$成立的$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$。

↓

求使$\begin{cases}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\end{cases}$成立的$\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{21}\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\end{bmatrix}$。

↓

求$\begin{cases}3x_{11}+1x_{21}=1\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$和$\begin{cases}3x_{12}+1x_{22}=0\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$的解。



解答

普通（？）解法	用矩阵表示左边的“普通（？）解法”	消元法
$\begin{cases}3x_{11}+1x_{21}=1\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}3x_{12}+1x_{22}=0\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$ 把上面的式子乘以 2。	$\begin{bmatrix}3&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&1&1&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}$
$\begin{cases}6x_{11}+2x_{21}=2\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}6x_{12}+2x_{22}=0\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$ 用上面的式子减去下面的式子。	$\begin{bmatrix}6&2\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}6&2&2&0\\1&2&0&1\end{bmatrix}$
$\begin{cases}5x_{11}+0x_{21}=2\\1x_{11}+2x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}5x_{12}+0x_{22}=-1\\1x_{12}+2x_{22}=1\end{cases}$ 把下面的式子乘以 5。	$\begin{bmatrix}5&0\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\0&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5&0&2&-1\\1&2&0&1\end{bmatrix}$
$\begin{cases}5x_{11}+0x_{21}=2\\5x_{11}+10x_{21}=0\end{cases}$ $\begin{cases}5x_{12}+0x_{22}=-1\\5x_{12}+10x_{22}=5\end{cases}$ 用下面的式子减去上面的式子。	$\begin{bmatrix}5&0\\5&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\0&5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5&0&2&-1\\5&10&0&5\end{bmatrix}$
$\begin{cases}5x_{11}+0x_{21}=2\\0x_{11}+10x_{21}=-2\end{cases}$ $\begin{cases}5x_{12}+0x_{22}=-1\\0x_{12}+10x_{22}=6\end{cases}$ 把上面的式子除以 5，下面的式子除以 10。	$\begin{bmatrix}5&0\\0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\\-2&6\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}5&0&2&-1\\0&10&-2&6\end{bmatrix}$
$\begin{cases}1x_{11}+0x_{21}=\frac{2}{5}\\0x_{11}+1x_{21}=-\frac{1}{5}\end{cases}$ $\begin{cases}1x_{12}+0x_{22}=-\frac{1}{5}\\0x_{12}+1x_{22}=\frac{3}{5}\end{cases}$ 方程的解就求出来了。	$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}&x_{12}\\x_{21}&x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&0&\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\0&1&-\frac{1}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$











让我们来检验一下，看看刚才求出的逆矩阵是否和原来的矩阵的乘积等于单位矩阵。



■ “原来的矩阵”乘以“逆矩阵”

$$\cdot\ \begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\times\frac{2}{5}+1\times\left(-\frac{1}{5}\right) & 3\times\left(-\frac{1}{5}\right)+1\times\frac{3}{5}\\1\times\frac{2}{5}+2\times\left(-\frac{1}{5}\right) & 1\times\left(-\frac{1}{5}\right)+2\times\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

■ “逆矩阵”乘以“原来的矩阵”

$$\cdot\ \begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\times 3+\left(-\frac{1}{5}\right)\times 1 & \frac{2}{5}\times 1+\left(-\frac{1}{5}\right)\times 2\\\left(-\frac{1}{5}\right)\times 3+\frac{3}{5}\times 1 & \left(-\frac{1}{5}\right)\times 1+\frac{3}{5}\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$



其结果确实等于单位矩阵。

从这个例子可以看出，“原来的矩阵”与“逆矩阵”相乘，不管其顺序如何，得到的乘积一定是单位矩阵。请记住这一点。

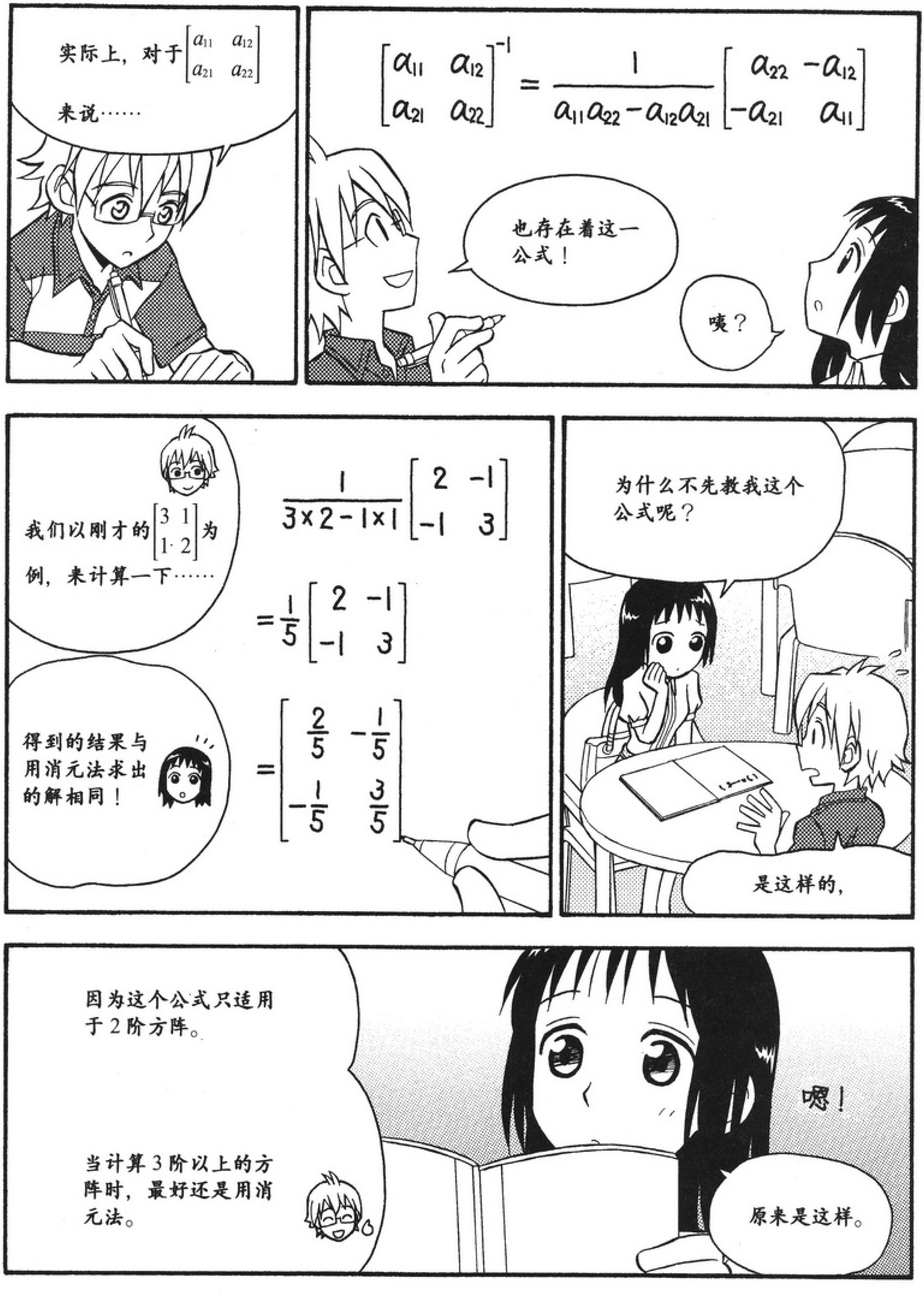


同时，



n 阶方阵 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ 的逆矩阵可以表示为 $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}^{-1}$。



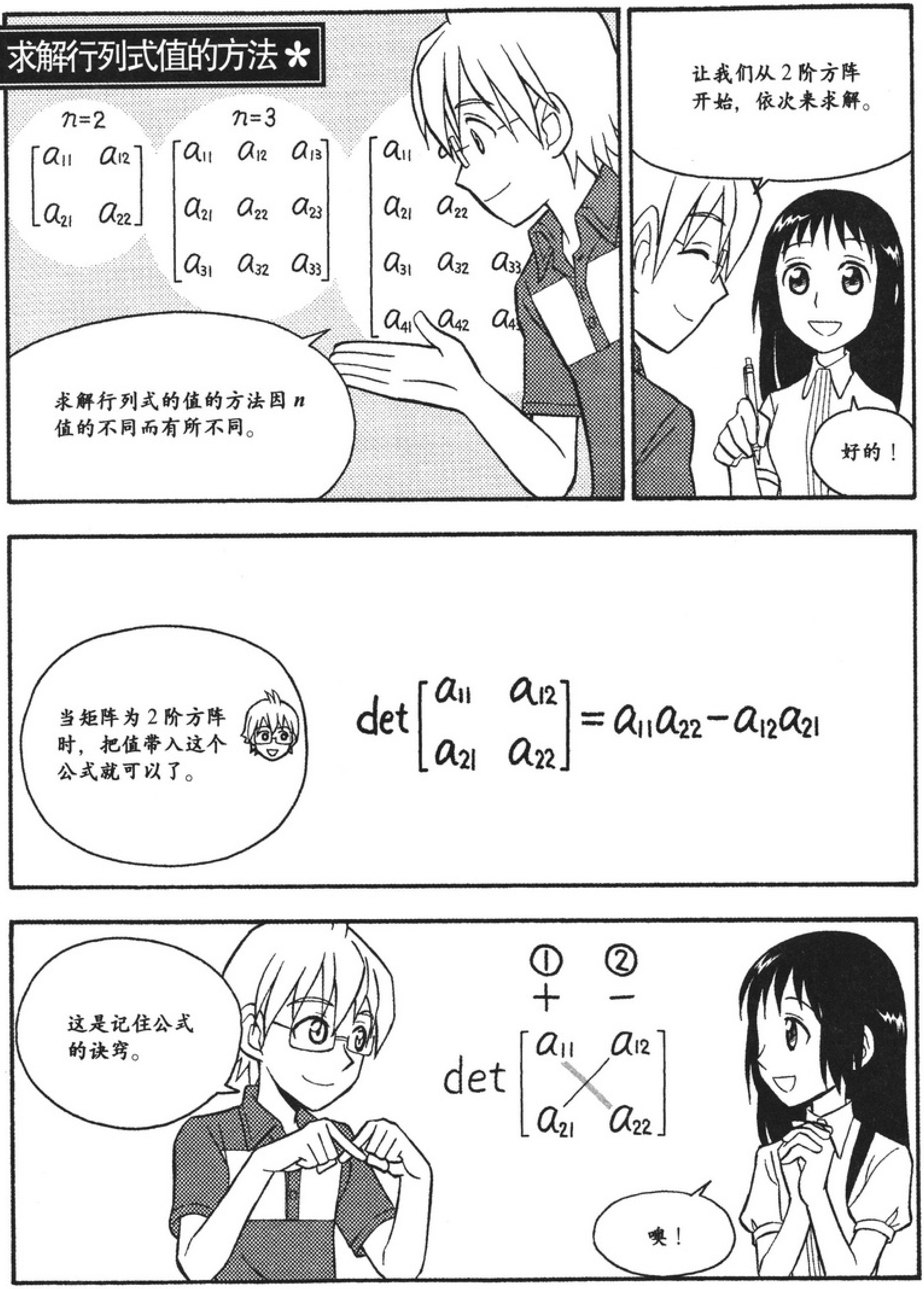


实际上，对于$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$来说……
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$
也存在着这一公式！
咦？
我们以刚才的$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$为例，来计算一下……
$\frac{1}{3\times 2-1\times 1}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$
得到的结果与用消元法求出的解相同！
为什么不先教我这个公式呢？
是这样的，
因为这个公式只适用于2阶方阵。
当计算3阶以上的方阵时，最好还是用消元法。
嗯！
原来是这样。

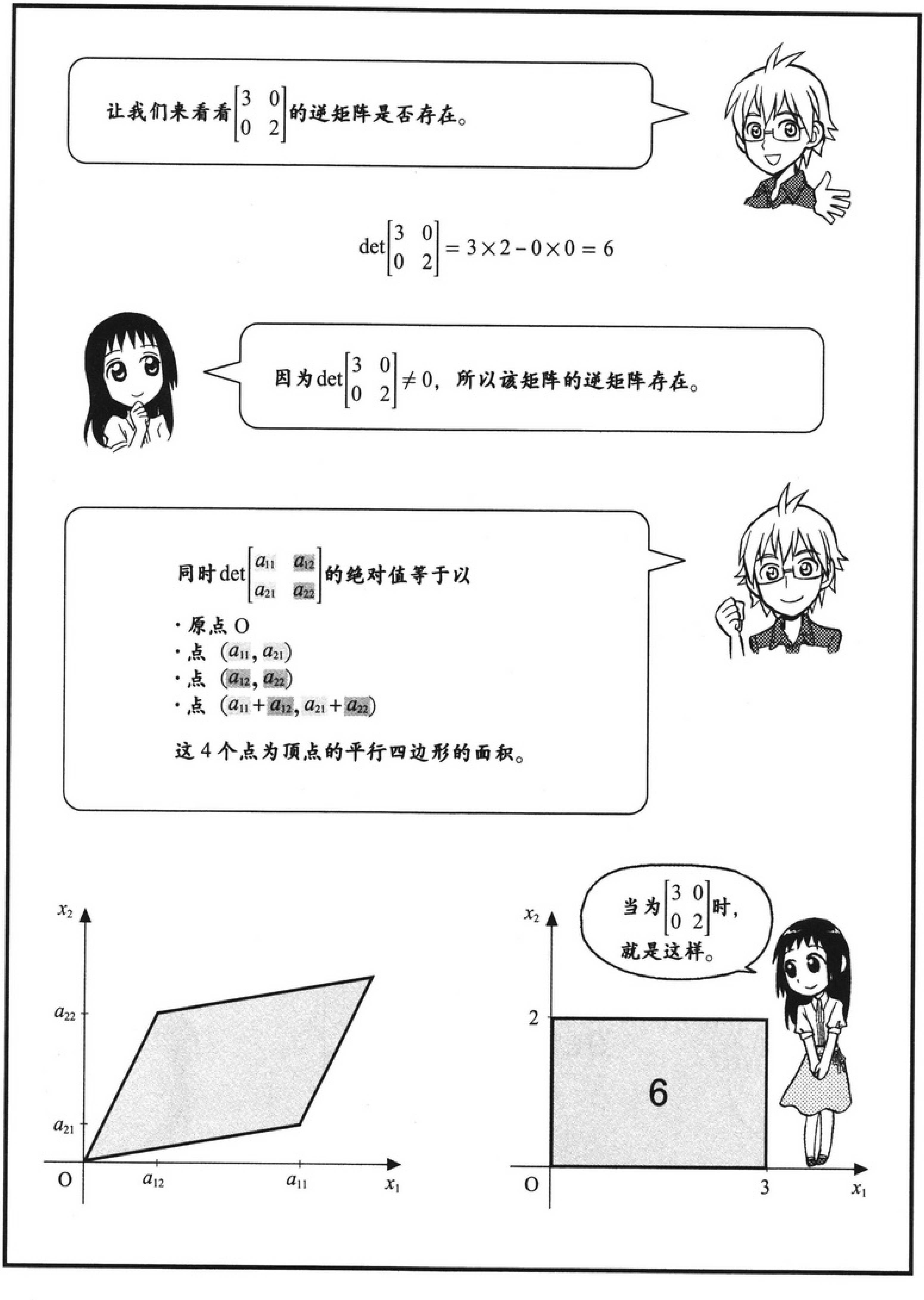

接着，让我们来讲解一下确认是否存在逆矩阵的方法。
你说的是否存在，是指有的矩阵没有逆矩阵吗？
是的。请试着用刚才的公式来求$\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}$。
嗯……
$\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}$
$=\frac{1}{3\times2-6\times1}\begin{bmatrix}2 & -6\\-1 & 3\end{bmatrix}$
确实是这样，分母为零，便求不出来。
同时，我们把存在逆矩阵的n阶方阵叫做**可逆矩阵**。
可逆矩阵
$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
不是可逆矩阵
$\begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{pmatrix}$
哦！


3. 行列式
关于确认是否存在逆矩阵的方法，
我们可以使用行列式指标。
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
可以表示为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
det?
determinant
=
决定因子
就是 determinant 的缩写。
存在逆矩阵的条件
$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$ 存在。
如果行列式的值不为零，那么该矩阵的逆矩阵就存在。
噢！

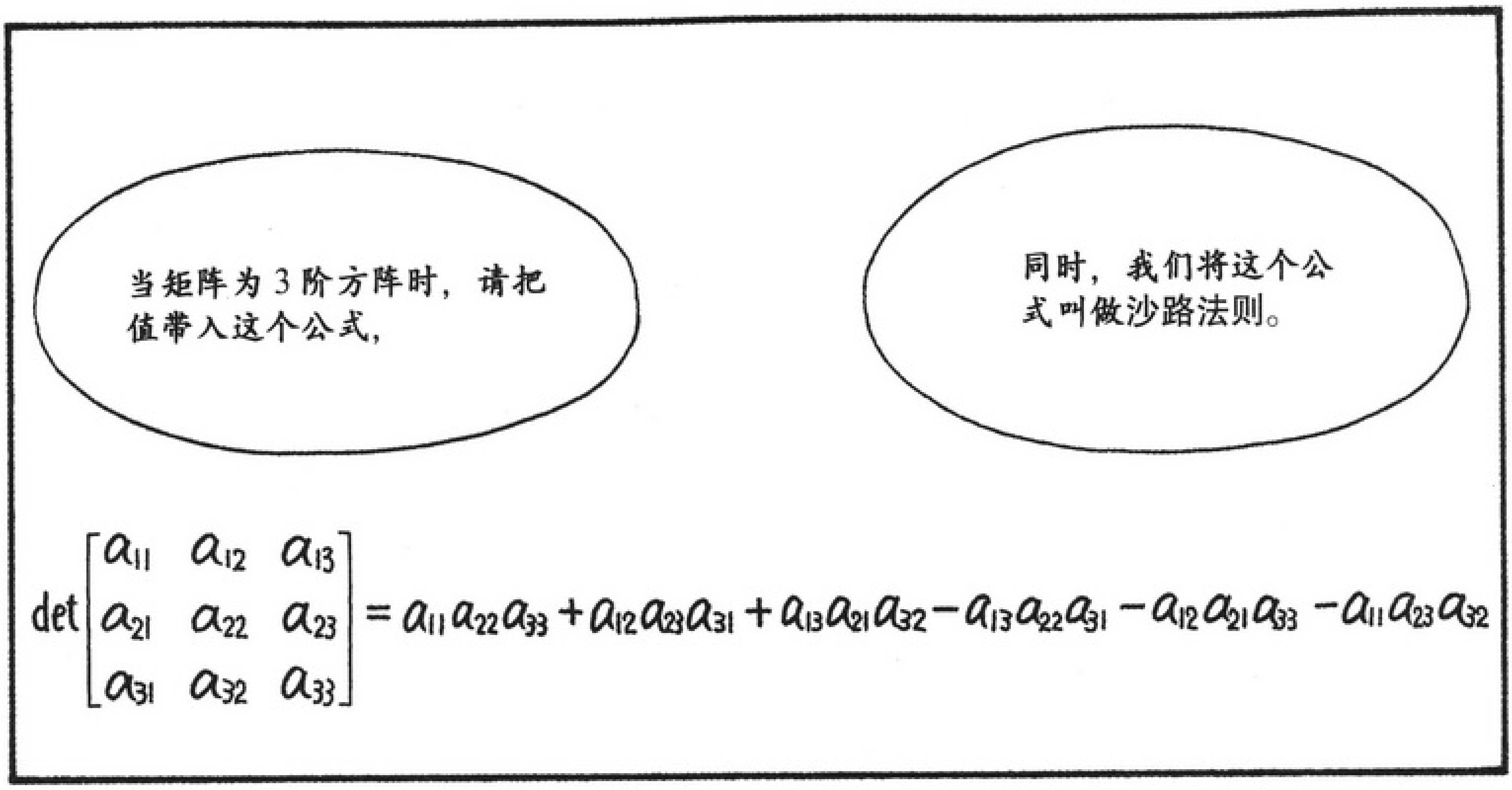
4. 求解行列式值的方法



n=2
n=3
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$
求解行列式的值的方法因 n 值的不同而有所不同。
让我们从 2 阶方阵开始，依次来求解。
好的！
当矩阵为 2 阶方阵时，把值带入这个公式就可以了。
$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
这是记住公式的诀窍。
① + ② −
$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$
噢！

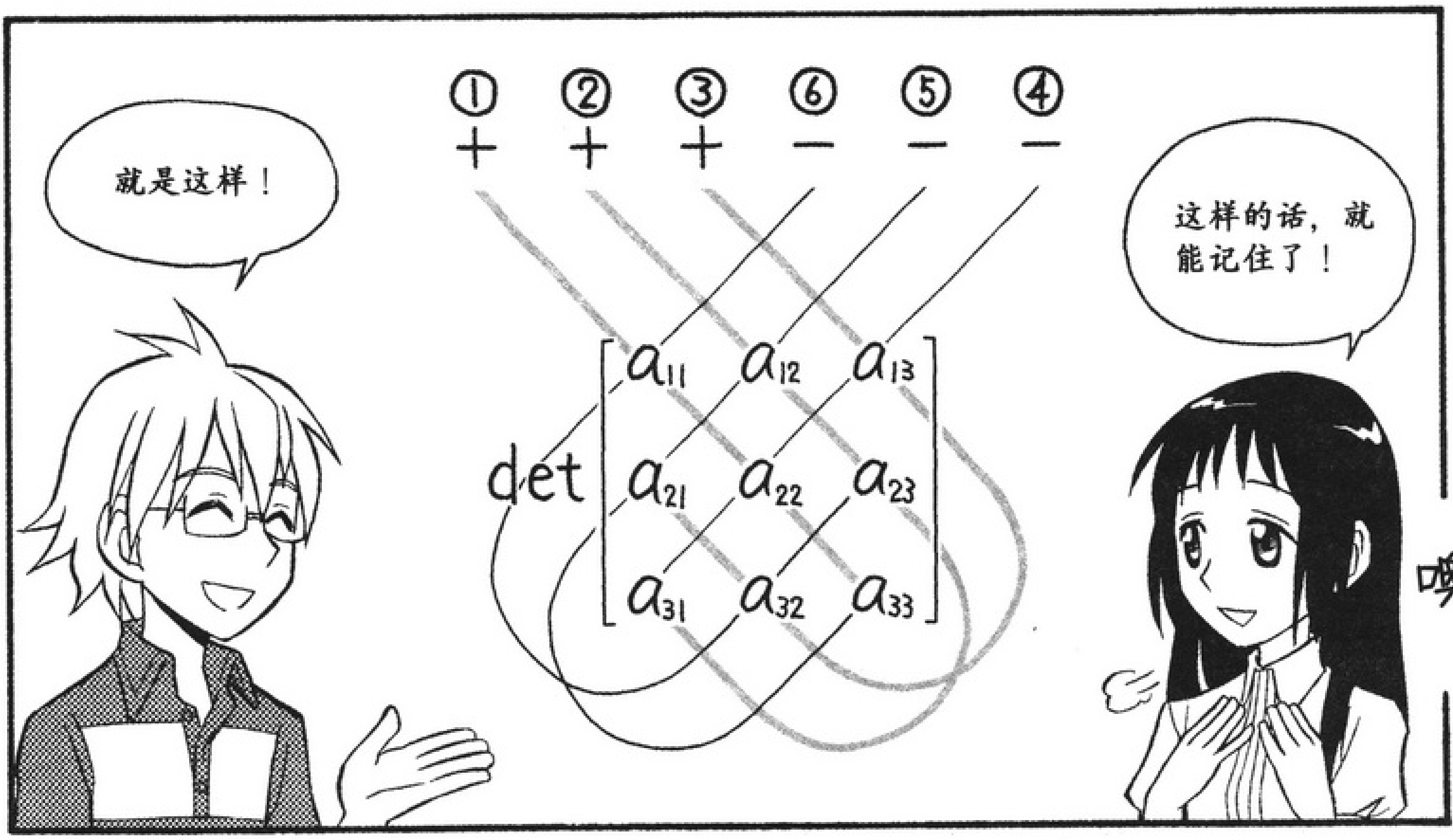


让我们来看看$\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$的逆矩阵是否存在。
$\det\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}=3\times2-0\times0=6$
因为$\det\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\neq0$，所以该矩阵的逆矩阵存在。
同时$\det\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$的绝对值等于以
·原点O
·点 (a_{11}, a_{21})
·点 (a_{12}, a_{22})
·点 $(a_{11}+a_{12}, a_{21}+a_{22})$
这4个点为顶点的平行四边形的面积。
x_2
a_{22}
a_{21}
O
a_{12}
a_{11}
x_1
当为$\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}$时，就是这样。
x_2
2
6
O
3
x_1



$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$







让我们来检验一下$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$是否有逆矩阵。

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 1\times1\times3 + 0\times(-1)\times(-2) + 0\times1\times0 - 0\times1\times(-2) - 0\times1\times3 - 1\times(-1)\times0$$

$$= 3 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= 3$$



因为$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \neq 0$，所以$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$有逆矩阵。

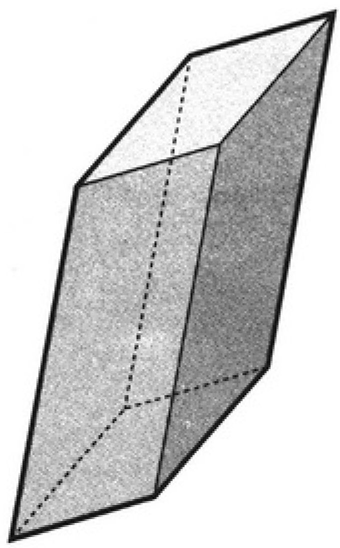
同时$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$的绝对值与以

- 原点 O
- 点 (a_{11}, a_{21}, a_{31})
- 点 (a_{12}, a_{22}, a_{32})
- 点 (a_{13}, a_{23}, a_{33})
- 点 $(a_{11}+a_{12}, a_{21}+a_{22}, a_{31}+a_{32})$
- 点 $(a_{11}+a_{13}, a_{21}+a_{23}, a_{31}+a_{33})$
- 点 $(a_{12}+a_{13}, a_{22}+a_{23}, a_{32}+a_{33})$
- 点 $(a_{11}+a_{12}+a_{13}, a_{21}+a_{22}+a_{23}, a_{31}+a_{32}+a_{33})$

如果这 8 个点作为顶点话，它与的平行六面体的体积相等。



平行六面体如右图所示，是相对的两个面互相平行，且相等的平行四边形所构成的立体图形。




下面该讲4阶方阵了吧？
对！
呵呵！
还可以使用这个公式吗？
不，很遗憾，4阶以上的方阵没有计算公式！
错啦！
啊？那么怎么才能求出行列式的值呢？
想知道这个——


必须知道“行列式的3个规律”。
3个规律？
嗯，行列式本身有规律性。
ぱらっ
请注意刚才公式中元素的行标和列标。
？
$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
规律 1
首先请注意各项左边的行标。
左边的？
じっ…


啊，那个都是从1开始的整数！
没错！
$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
1 2　1 2
$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
1 2 3　1 2 3　1 2 3　1 2 3　1 2 3　1 2 3
这就是规律1！
规律 2
这次请看一下右边的列标。
嗯，这边的比较混乱。
不，右边的列标与排列模型是一致的，这就是规律2。
啊，真的啊！
$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
1 2　2 1
$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$
1 2 3　2 3 1　3 1 2　3 2 1　2 1 3　1 3 2
1～2的排列
模型1　1 2
模型2　2 1
1～3的排列
模型1　1 2 3
模型2　1 3 2
模型3　2 1 3
模型4　2 3 1
模型5　3 1 2
模型6　3 2 1



	1～2的排列	行列式的对应项	逆向
模型 1	1 2	$a_{11}a_{22}$	
模型 2	2 1	$a_{12}a_{21}$	2和1

	1～3的排列	行列式的对应项	逆向		
模型 1	1 2 3	$a_{11}a_{22}a_{33}$			
模型 2	1 3 2	$a_{11}a_{23}a_{32}$			3和2
模型 3	2 1 3	$a_{12}a_{21}a_{33}$	2和1		
模型 4	2 3 1	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2和1	3和1	
模型 5	3 1 2	$a_{13}a_{21}a_{32}$		3和1	3和2
模型 6	3 2 1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	2和1	3和1	3和2

	1～2的排列	行列式的对应项	逆向	逆向的个数	符号
模型1	1 2	$a_{11}a_{22}$		0	+
模型2	2 1	$a_{12}a_{21}$	2和1	1	−

	1～3的排列	行列式的对应项	逆向			逆向的个数	符号
模型1	1 2 3	$a_{11}a_{22}a_{33}$				0	+
模型2	1 3 2	$a_{11}a_{23}a_{32}$			3和2	1	−
模型3	2 1 3	$a_{12}a_{21}a_{33}$	2和1			1	−
模型4	2 3 1	$a_{12}a_{23}a_{31}$	2和1	3和1		2	+
模型5	3 1 2	$a_{13}a_{21}a_{32}$		3和1	3和2	2	+
模型6	3 2 1	$a_{13}a_{22}a_{31}$	2和1	3和1	3和2	3	−

就是这样。

哦！



$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

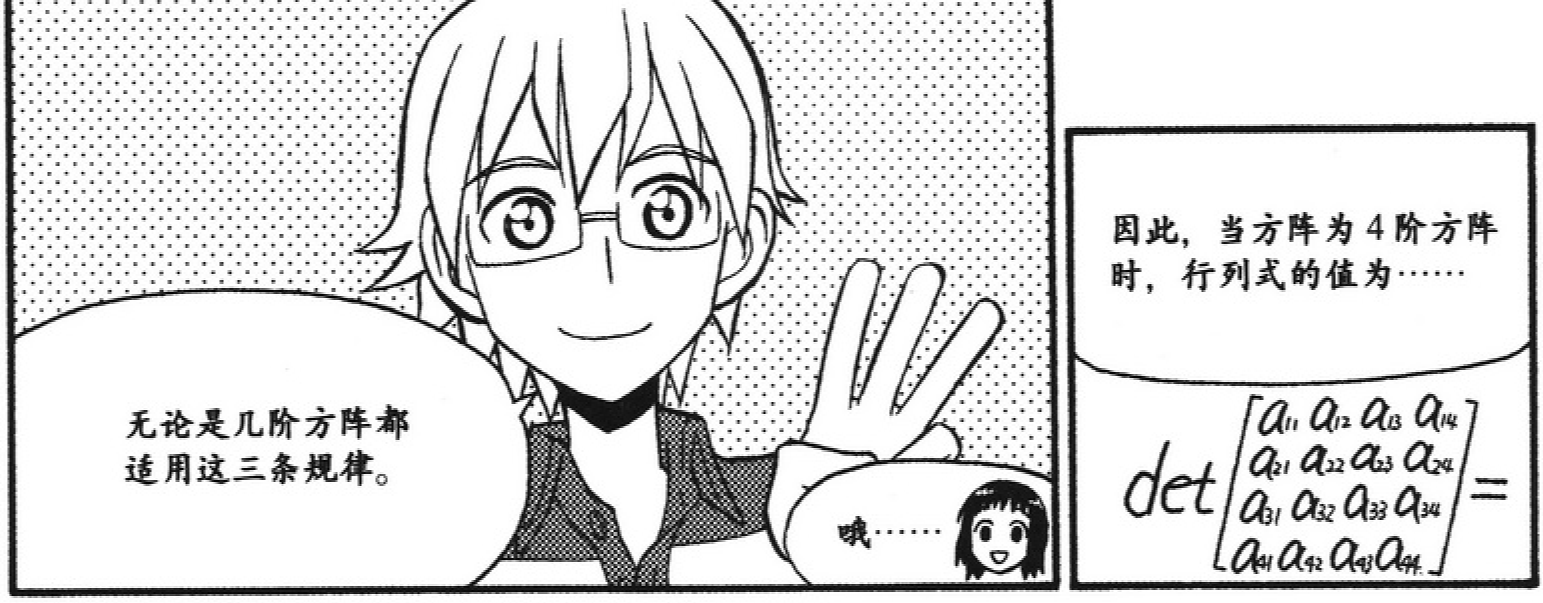
行列式的对应项	符号
$a_{11}a_{22}$	+
$a_{12}a_{21}$	−

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

行列式的对应项	符号
$a_{11}a_{22}a_{33}$	+
$a_{11}a_{23}a_{32}$	−
$a_{12}a_{21}a_{33}$	−
$a_{12}a_{23}a_{31}$	+
$a_{13}a_{21}a_{32}$	+
$a_{13}a_{22}a_{31}$	−

你太厉害了，都对应上了。

对，这就是第三条规律！



	1～4的排列	行列式的对应项	逆向						逆向的个数	符号
模型 1	1 2 3 4	$a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$							0	+
模型 2	1 2 4 3	$a_{11}\ a_{22}\ a_{34}\ a_{43}$						4和3	1	−
模型 3	1 3 2 4	$a_{11}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{44}$			3和2				1	−
模型 4	1 3 4 2	$a_{11}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{42}$			3和2		4和2		2	+
模型 5	1 4 2 3	$a_{11}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{43}$					4和2	4和3	2	+
模型 6	1 4 3 2	$a_{11}\ a_{24}\ a_{33}\ a_{42}$			3和2		4和2	4和3	3	−
模型 7	2 1 3 4	$a_{12}\ a_{21}\ a_{33}\ a_{44}$	2和1						1	−
模型 8	2 1 4 3	$a_{12}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{43}$	2和1					4和3	2	+
模型 9	2 3 1 4	$a_{12}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{44}$	2和1	3和1					2	+
模型 10	2 3 4 1	$a_{12}\ a_{23}\ a_{34}\ a_{41}$	2和1	3和1		4和1			3	−
模型 11	2 4 1 3	$a_{12}\ a_{24}\ a_{31}\ a_{43}$	2和1			4和1		4和3	3	−
模型 12	2 4 3 1	$a_{12}\ a_{24}\ a_{33}\ a_{41}$	2和1	3和1		4和1		4和3	4	+
模型 13	3 1 2 4	$a_{13}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{44}$		3和1	3和2				2	+
模型 14	3 1 4 2	$a_{13}\ a_{21}\ a_{34}\ a_{42}$		3和1	3和2		4和2		3	−
模型 15	3 2 1 4	$a_{13}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{44}$	2和1	3和1	3和2				3	−
模型 16	3 2 4 1	$a_{13}\ a_{22}\ a_{34}\ a_{41}$	2和1	3和1	3和2	4和1			4	+
模型 17	3 4 1 2	$a_{13}\ a_{24}\ a_{31}\ a_{42}$		3和1	3和2	4和1	4和2		4	+
模型 18	3 4 2 1	$a_{13}\ a_{24}\ a_{32}\ a_{41}$	2和1	3和1	3和2	4和1	4和2		5	−
模型 19	4 1 2 3	$a_{14}\ a_{21}\ a_{32}\ a_{43}$				4和1	4和2	4和3	3	−
模型 20	4 1 3 2	$a_{14}\ a_{21}\ a_{33}\ a_{42}$			3和2	4和1	4和2	4和3	4	+
模型 21	4 2 1 3	$a_{14}\ a_{22}\ a_{31}\ a_{43}$	2和1			4和1	4和2	4和3	4	+
模型 22	4 2 3 1	$a_{14}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{41}$	2和1	3和1		4和1	4和2	4和3	5	−
模型 23	4 3 1 2	$a_{14}\ a_{23}\ a_{31}\ a_{42}$		3和1	3和2	4和1	4和2	4和3	5	−
模型 24	4 3 2 1	$a_{14}\ a_{23}\ a_{32}\ a_{41}$	2和1	3和1	3和2	4和1	4和2	4和3	6	+






要是在考试中出这样的题目，那可真是够费劲儿的。
不要紧啦，一般出题都是2阶或3阶的。
ホッ
那就太好了！
我已经讲了好多内容了，今天的课就上到这儿吧！
好的！谢谢你！
今天下课可真早啊！
……
好！


收款台 CASHB
需要加个袋子吗？
这么晚了！
ガン
ガン
ガン
谁还在这儿？
真派花道

✱ 5. 利用代数余子式的方法求逆矩阵 ✱

在第 94 页时，我们曾说过求逆矩阵的方法有代数余子式法和消元法。后一种方法我们已经讲解过了。前一种方法因为计算非常麻烦，实际中不常用，所以笔者没有重点讲解。虽说如此，但是在很多书上都涉及到此内容，所以也要大致了解一下。

要理解这种方法，首先需要知道有关

- 元素 a_{ij} 的余子式
- 元素 a_{ij} 的代数余子式

的知识。那么我们先解说这些相关知识，然后再讲解这种方法。

5.1 余子式

元素 $\boldsymbol{a_{ij}}$ **的余子式**是指"省略了 n 阶方阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 的第 i 行和第 j 列"的行列式。

在下页的表中，就归纳出了 3 阶方阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 所有元素的余子式。

• 元素 a_{11} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{bmatrix}=3$	• 元素 a_{12} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{bmatrix}=1$	• 元素 a_{13} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 0\end{bmatrix}=2$
• 元素 a_{21} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}=0$	• 元素 a_{22} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 3\end{bmatrix}=3$	• 元素 a_{23} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix}=0$
• 元素 a_{31} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}=0$	• 元素 a_{32} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}=-1$	• 元素 a_{33} 的余子式 $\det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}=1$

5.2 元素a_{ij}的代数余子式

元素 a_{ij} **的代数余子式**是指元素 a_{ij} 的余子式乘以 $(-1)^{i+j}$ 的值。可以表示为 A_{ij}。

下表归纳出了 3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & -1\\-2 & 0 & 3\end{bmatrix}$所有元素的代数余子式。

• 元素 a_{11} 的代数余子式 $A_{11}=(-1)^{1+1}\det\begin{bmatrix}1 & -1\\0 & 3\end{bmatrix}$ $=1\times3$ $=3$	• 元素 a_{12} 的代数余子式 $A_{12}=(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix}1 & -1\\-2 & 3\end{bmatrix}$ $=(-1)\times1$ $=-1$	• 元素 a_{13} 的代数余子式 $A_{13}=(-1)^{1+3}\det\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 0\end{bmatrix}$ $=1\times2$ $=2$
• 元素 a_{21} 的代数余子式 $A_{21}=(-1)^{2+1}\det\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$ $=(-1)\times0$ $=0$	• 元素 a_{22} 的代数余子式 $A_{22}=(-1)^{2+2}\det\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 3\end{bmatrix}$ $=1\times3$ $=3$	• 元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23}=(-1)^{2+3}\det\begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 0\end{bmatrix}$ $=(-1)\times0$ $=0$
• 元素 a_{31} 的代数余子式 $A_{31}=(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}$ $=1\times0$ $=0$	• 元素 a_{32} 的代数余子式 $A_{32}=(-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}$ $=(-1)\times(-1)$ $=1$	• 元素 a_{33} 的代数余子式 $A_{33}=(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$ $=1\times1$ $=1$

由元素 a_{ij} 的代数余子式[1]构成的 n 阶方阵，$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$ 叫做矩阵 A 的**伴随矩阵**。

n 阶方阵 $\begin{bmatrix} a_{11}A_{11} & a_{21}A_{21} & \cdots & a_{n1}A_{n1} \\ a_{12}A_{12} & a_{22}A_{22} & \cdots & a_{n2}A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}A_{1n} & a_{2n}A_{2n} & \cdots & a_{nn}A_{nn} \end{bmatrix}$ 的任意行或列的和都与原本的 n 阶方阵的行列式

$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & A_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 相等。

1. 并不是将元素 a_{ij} 代数余子式写错了，元素 a_{ji} 代数余子式是正确的。

5.3 利用代数余子式法求逆矩阵

逆矩阵可以由公式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & A_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & A_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

求得。

比如，3 阶方阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$的逆矩阵就是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✻ 6. 利用克莱姆法则解一次方程组 ✻

解一次方程组的方法，除了利用第 95 页介绍过的消元法，还可以利用克莱姆法则。

不过，克莱姆法则虽然叫做法则，但并不是将值代入就能够将方程的解求出来那样简单。我们大致来讲解一下。

问题 请用克莱姆法则解以下一次方程组。

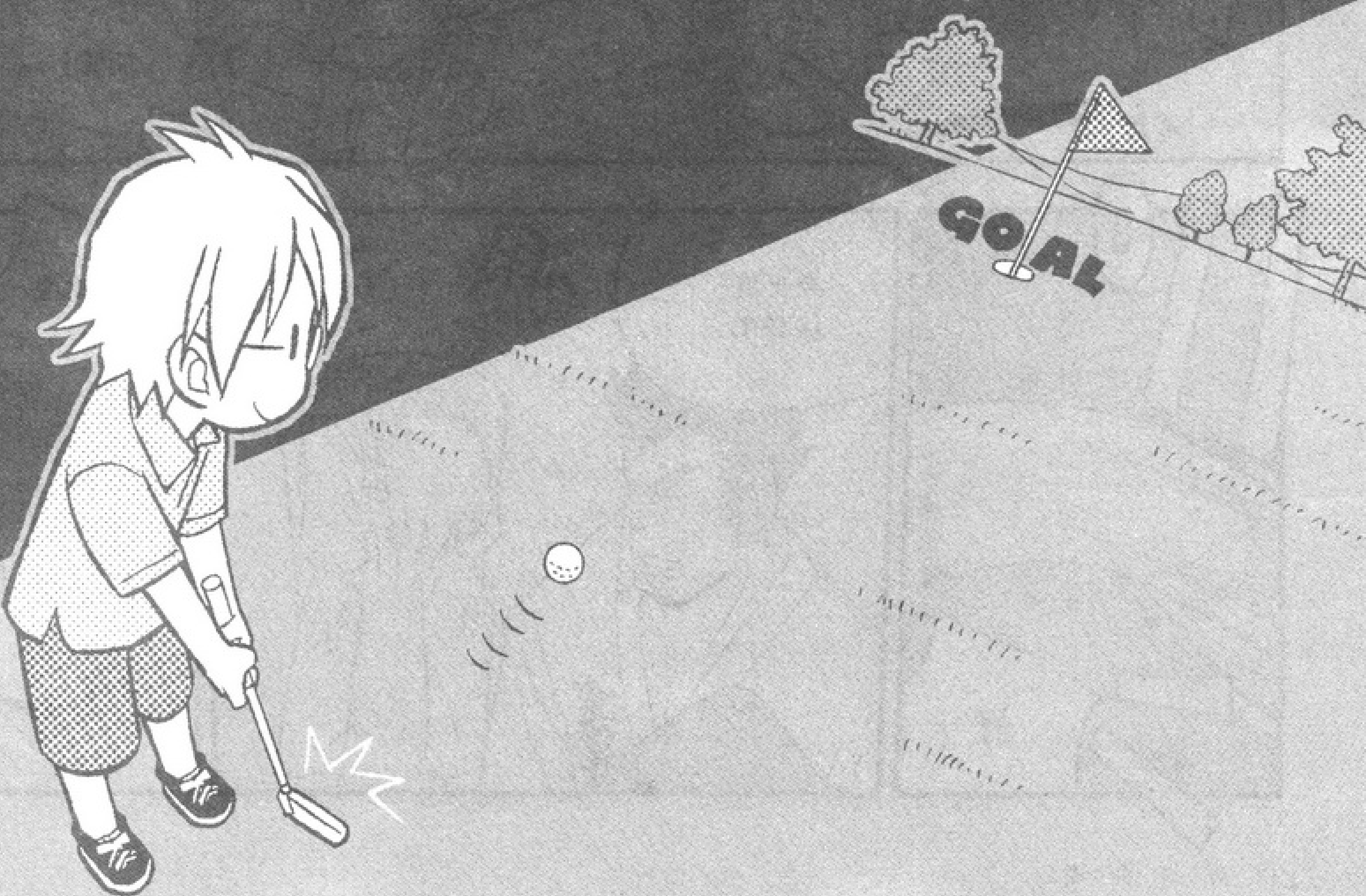
$$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

解答

步骤 1 把一次方程组由这个形式 $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ 变换成这个形式 $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$	把$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = 1 \\ 1x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$进行变换 后就成了$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
步骤 2 验证 $$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq 0$$	$$\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 1 \neq 0$$ 成立。
步骤 3 将值代入以下所示的克莱姆法则中，求出方程的解。 第 i 列 ↓ $$x_i = \frac{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$	· $x_1 = \dfrac{\det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \dfrac{1 \times 2 - 1 \times 0}{5} = \dfrac{2}{5}$ · $x_2 = \dfrac{\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} = \dfrac{3 \times 0 - 1 \times 1}{5} = -\dfrac{1}{5}$

第5章

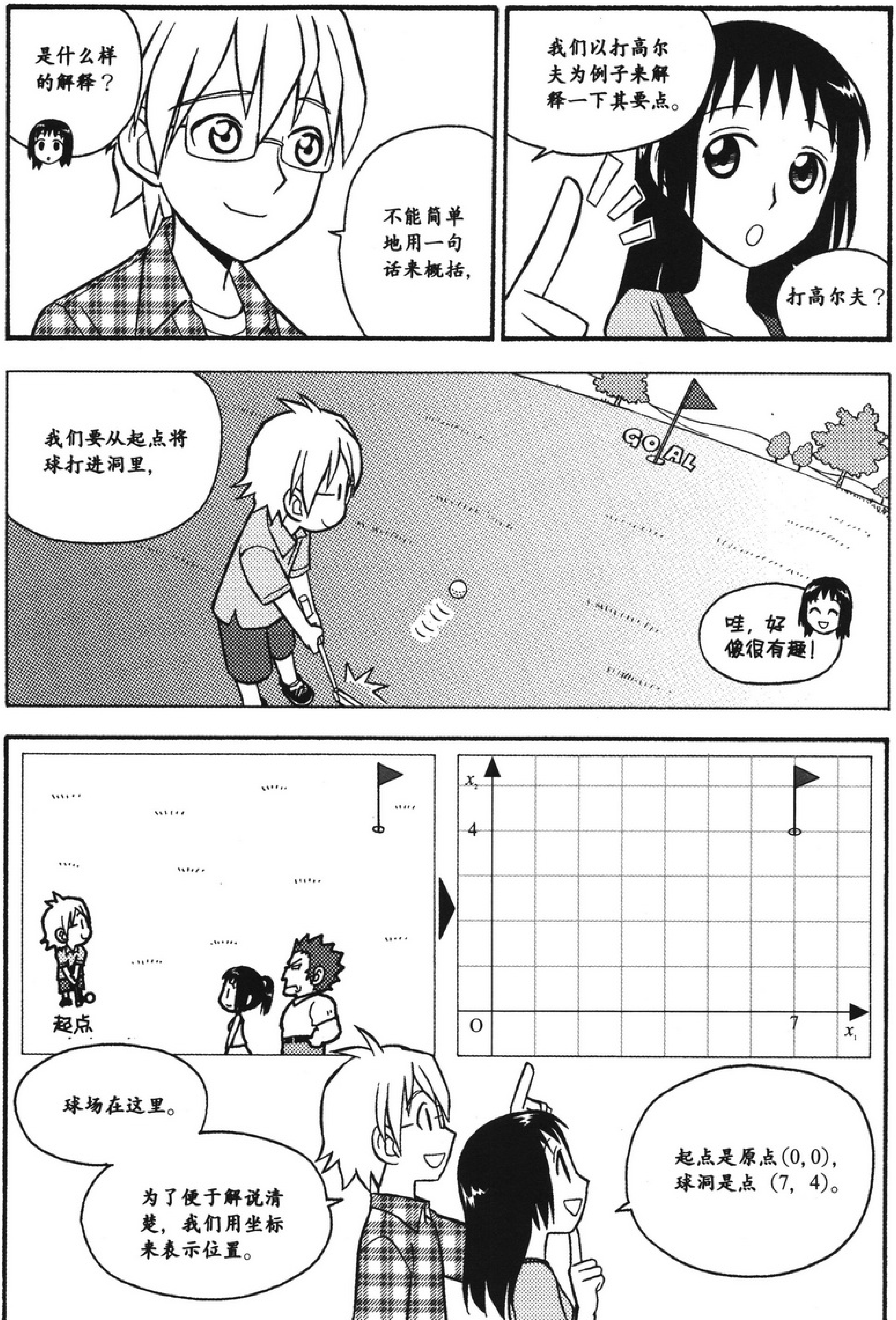
向 量




最后1分！
哈
加油！
再用力！
想打倒我吗？
过来试试！
加油！
好！
今天就
这样吧。
谢谢！
还需要
练习。


呵！
都已经摇摇晃晃了。
哇！
我，我还行！
我还一点都没有变强！
请再让我来一次！
好，那么，来吧！
加油！拜托你了！


基础
基础知识
准备
矩阵
向量
线性映射
特征值和特征向量
今天我要讲解向量的知识。
向量在线性代数中经常出现，让我们一起努力吧！
那就拜托你了！
ぐったり
课程结构
百合野，你不要紧吧？
要不这次就不要上课了吧？
不，我不要紧。再过5分钟，刚才吃的便当就会发挥作用了。
1. 向量
5分钟后
对不起，我们继续吧！
恢复精神
向量
是对矩阵的特殊解释。
解释？


是什么样的解释？
不能简单地用一句话来概括，
我们以打高尔夫为例子来解释一下其要点。
打高尔夫？
我们要从起点将球打进洞里，
GOAL
哇，好像很有趣！
起点
x_2
4
O
7
x_1
球场在这里。
为了便于解说清楚，我们用坐标来表示位置。
起点是原点(0，0)，球洞是点（7，4)。

PLAYER1

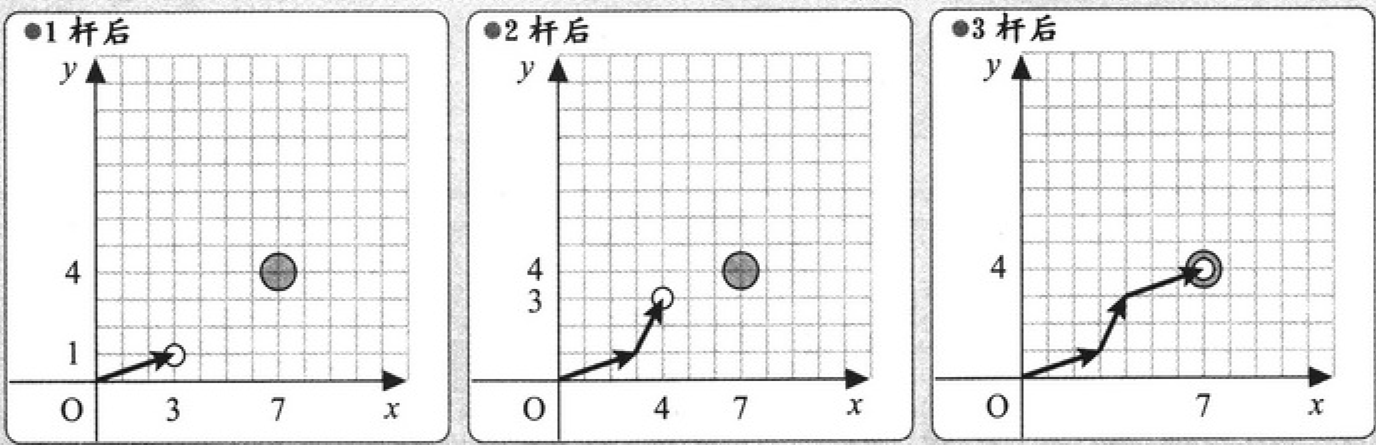
百合野　玲治



首先是我，
可以以 3 杆进球。



REPLAY



打球具体过程

	1 杆后	2 杆后	3 杆后
球的位置	点（3，1）	点（4，3）	点（7，4）
从前面的地点来看球的位置	从起点原点（0，0）看，右边为 3，上边为 1	从 1 杆后的地点（3，1）看，右边为 1，上边为 2	从 2 杆后的地点（4，3）看，右边为 3，上边为 1
用（右 上）这个标志来表示球的位置的变化	（3 1）	（3 1）＋（1 2）＝（4 3）	（3 1）＋（1 2）＋（3 1）＝（7 4）

PLAYER2

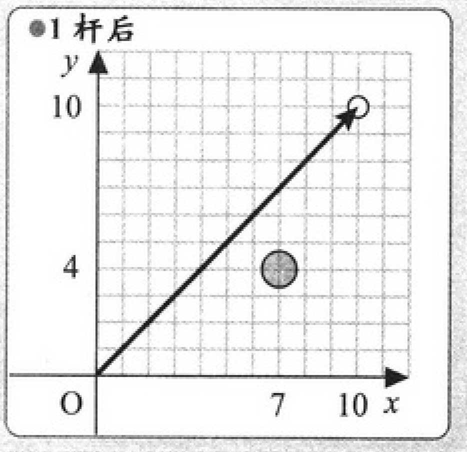
一之濑　美纱



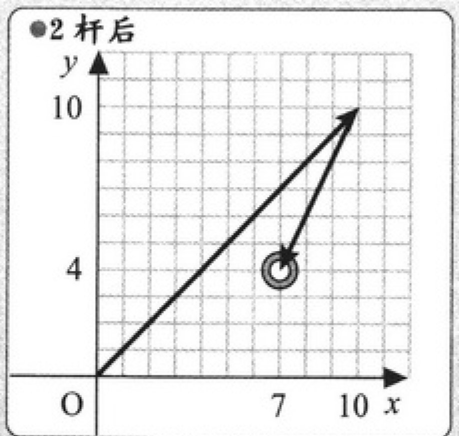


REPLAY

●1 杆后



●2 杆后



打球具体过程

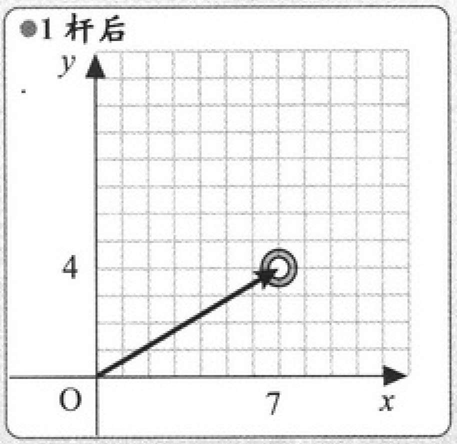
	1 杆后	2 杆后
球的位置	点（10，10）	点（7，4）
从前面的地点来看球的位置	从起点原点（0，0）看，右边为 10，上边为 10	从 1 杆后的地点（10，10）看，右边为 −3，上边为 −6
用（右 上）这个标志来表示球的位置的变化	（10 10）	（10 10）＋（−3 −6）＝（7 4）

PLAYER3

一之濑　战太郎



REPLAY



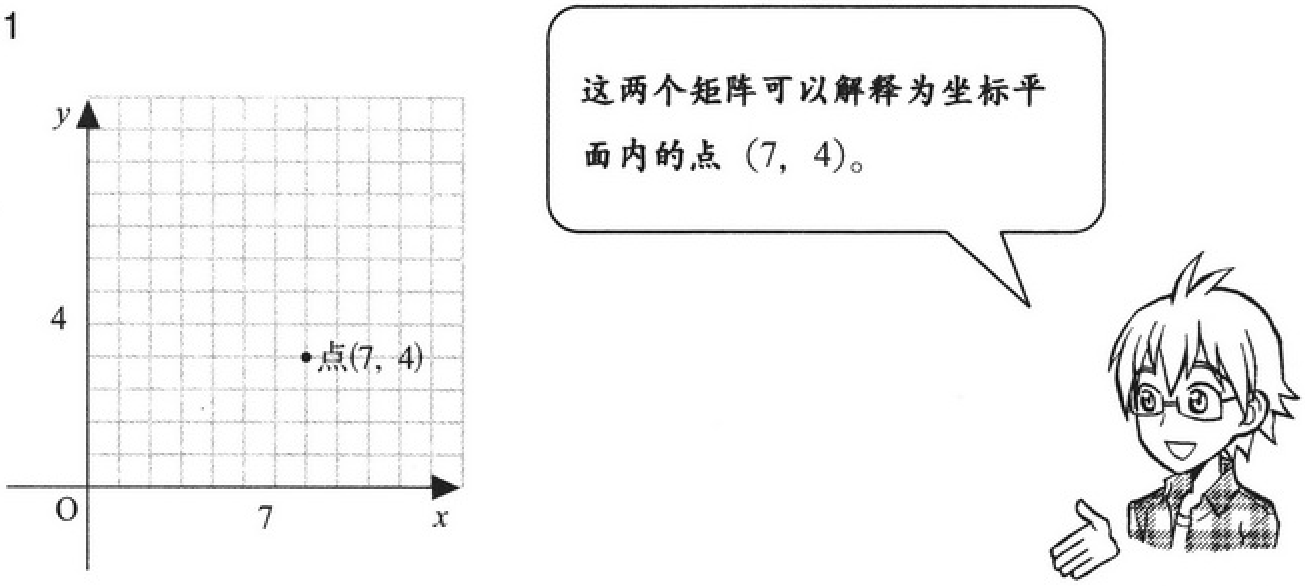
打球具体过程

	1 杆后
球的位置	点（7，4）
从前面的地点来看球的位置	从起点，即原点处（0，0）看，右边为 7，上边为 4
用（右 上）这个标志来表示球的位置的变化	（7 4）

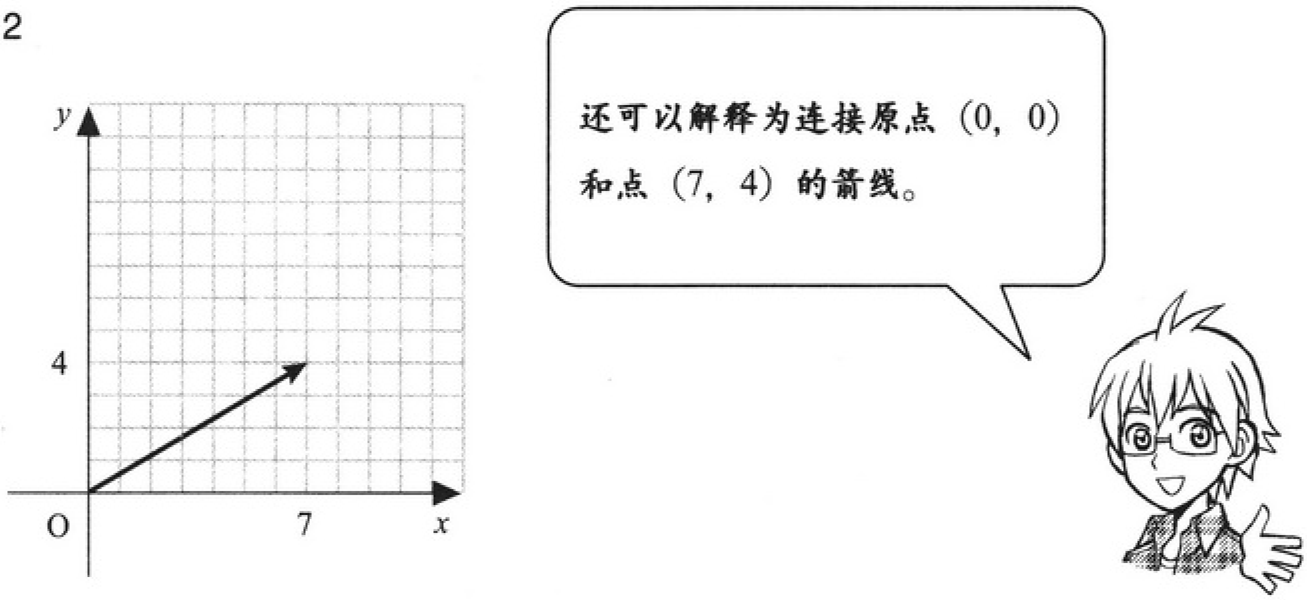


3个人都可以把球打入球洞里啊。
START
GOAL
那么，我们就按照刚才打高尔夫球的例子来讲解向量吧！
$1\times n$矩阵$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ 以及 $n\times 1$矩阵$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$
向量也是一种矩阵，它可以用下面4种方法来解释。
n?
我们将通过1×2矩阵（7 4）和2×1矩阵$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$来进行说明。
好的！

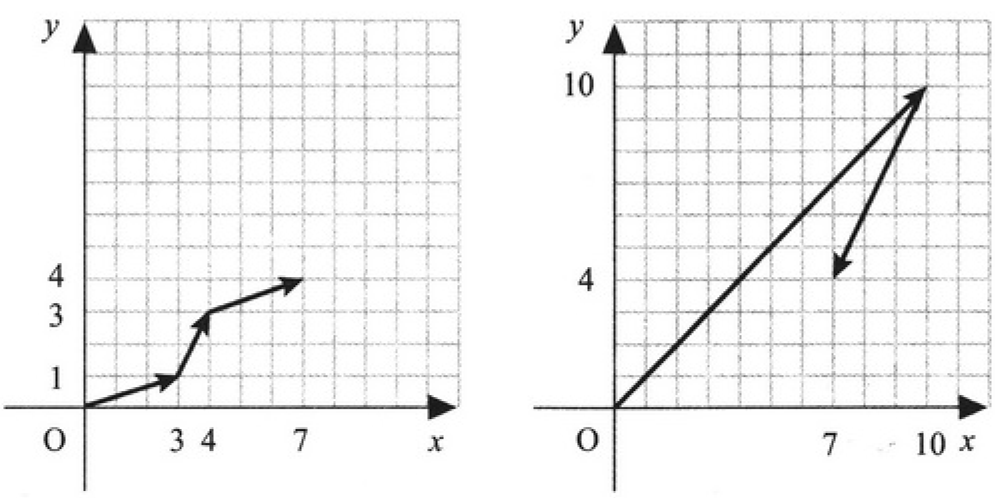
■ 解释 1


y
4
点(7, 4)
O
7
x
这两个矩阵可以解释为坐标平面内的点（7，4）。

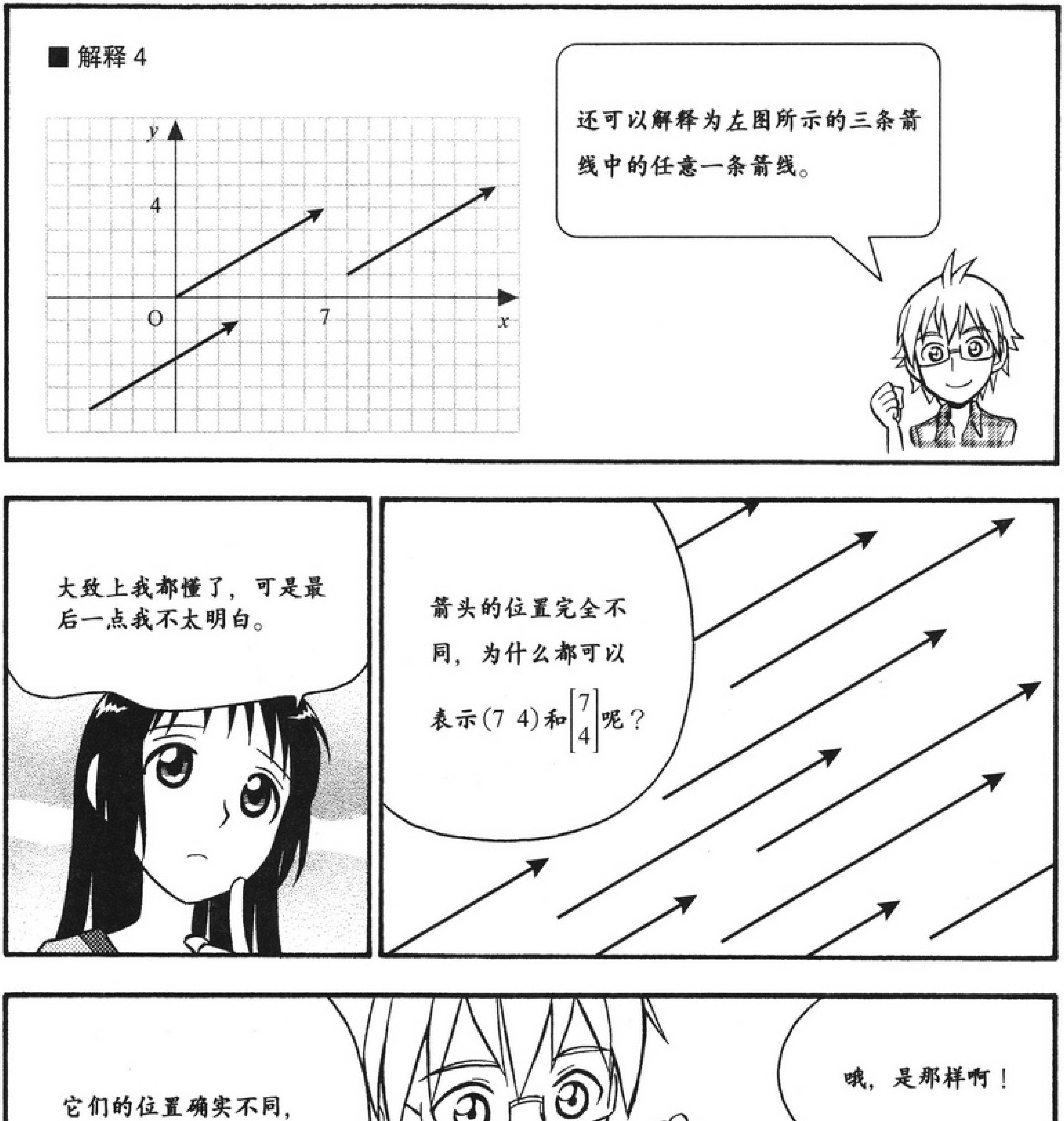
■ 解释 2


y
4
O
7
x
还可以解释为连接原点（0，0）和点（7，4）的箭线。

■ 解释 3


y
4
3
1
O
3 4
7
x
y
10
4
O
7
10 x


也可以解释为如左图所示的箭头的和。


■ 解释 4
y
4
O
7
x
还可以解释为左图所示的三条箭线中的任意一条箭线。
大致上我都懂了，可是最后一点我不太明白。
箭头的位置完全不同，为什么都可以表示(7 4)和$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$呢？
它们的位置确实不同，但是从其箭尾到箭头的水平长度都为7，垂直长度都为4，就是说这些箭线都是相等的。
哦，是那样啊！


向量的概念确实有些不太好理解。
嗯，我也不太清楚是谁想出来的，
只是……
不管它的起源如何，总之向量已被广泛用于各个领域。
比如说，在研究物理学中的“力”时，就会用到向量的知识。
噢！
杠杆的力
重力

2. 向量的计算



■ 和

- $\begin{pmatrix}10 & 10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10+(-3) & 10+(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\end{pmatrix}$

- $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10+(-3)\\10+(-6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$

■ 差

- $\begin{pmatrix}10 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10-3 & 10-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\end{pmatrix}$

- $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10-3\\10-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}$

■ 倍　数

- $2\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times3 & 2\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\end{pmatrix}$

- $2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\times3\\2\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\2\end{bmatrix}$

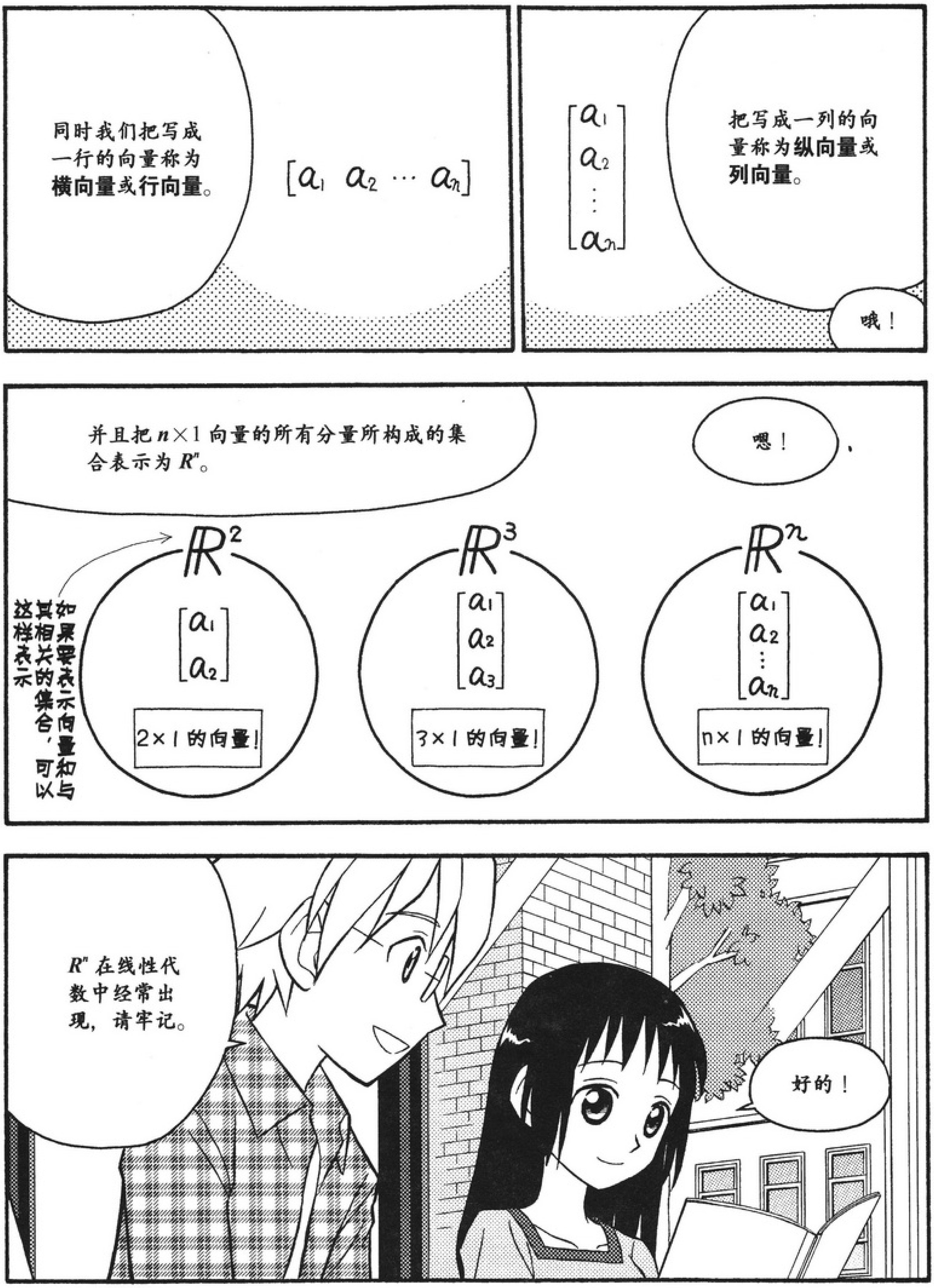
■ 积

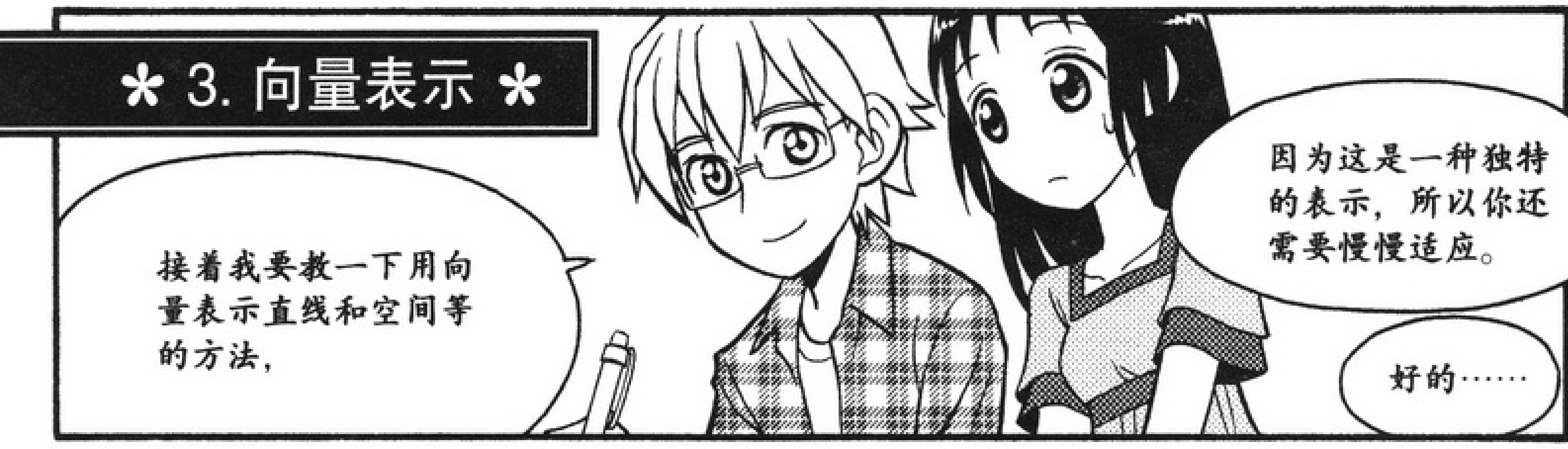
- $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}3\times1 & 3\times2\\1\times1 & 1\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}$

- $\begin{pmatrix}3 & 1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$

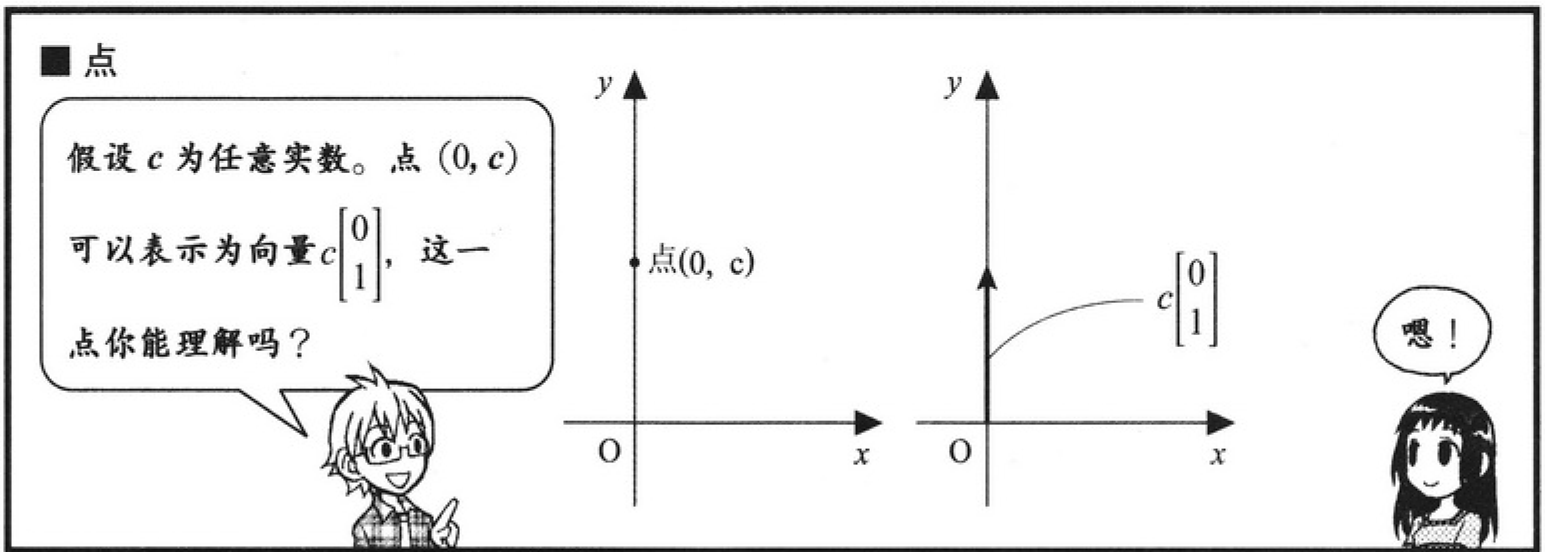
- $\begin{bmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\times3+(-3)\times1\\2\times3+1\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21\\7\end{bmatrix}=7\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$



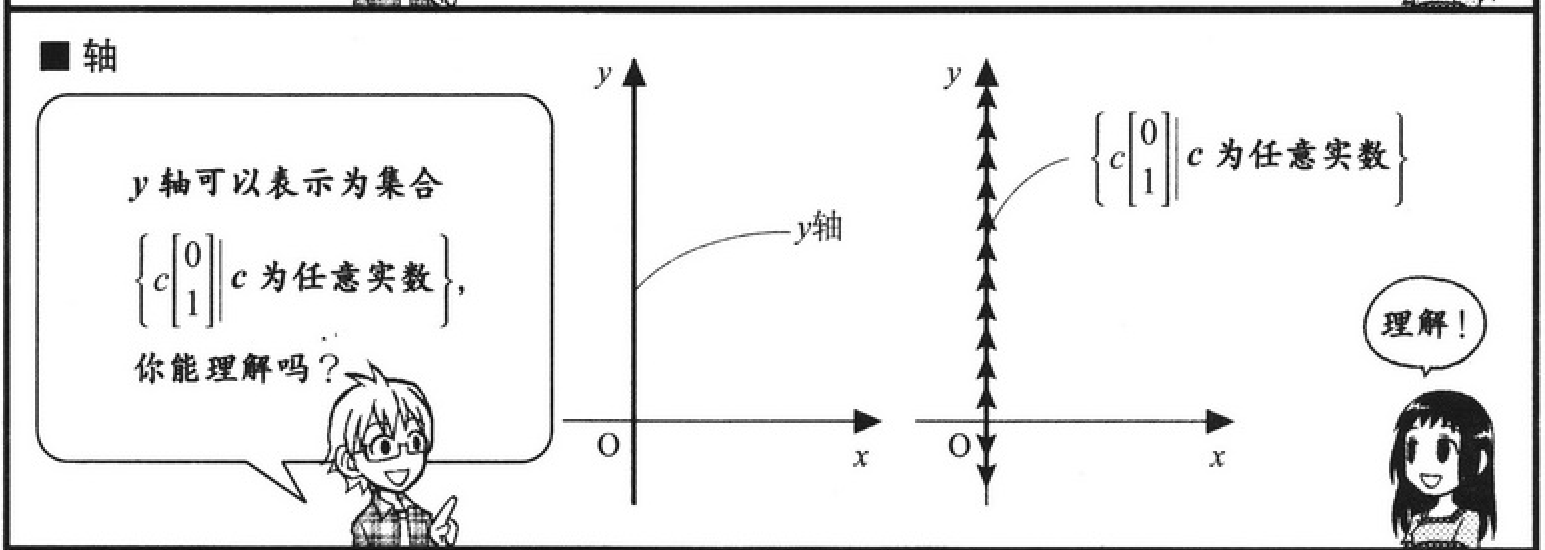

同时我们把写成一行的向量称为横向量或行向量。
$[a_1\ a_2\ \cdots\ a_n]$
$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$
把写成一列的向量称为纵向量或列向量。
哦！
并且把 $n\times1$ 向量的所有分量所构成的集合表示为 R^n。
嗯！
如果要表示向量和与其相关的集合，可以这样表示
$\mathbb{R}^2$
$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$
2×1的向量！
$\mathbb{R}^3$
$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$
3×1的向量！
$\mathbb{R}^n$
$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$
n×1的向量！
R^n 在线性代数中经常出现，请牢记。
好的！



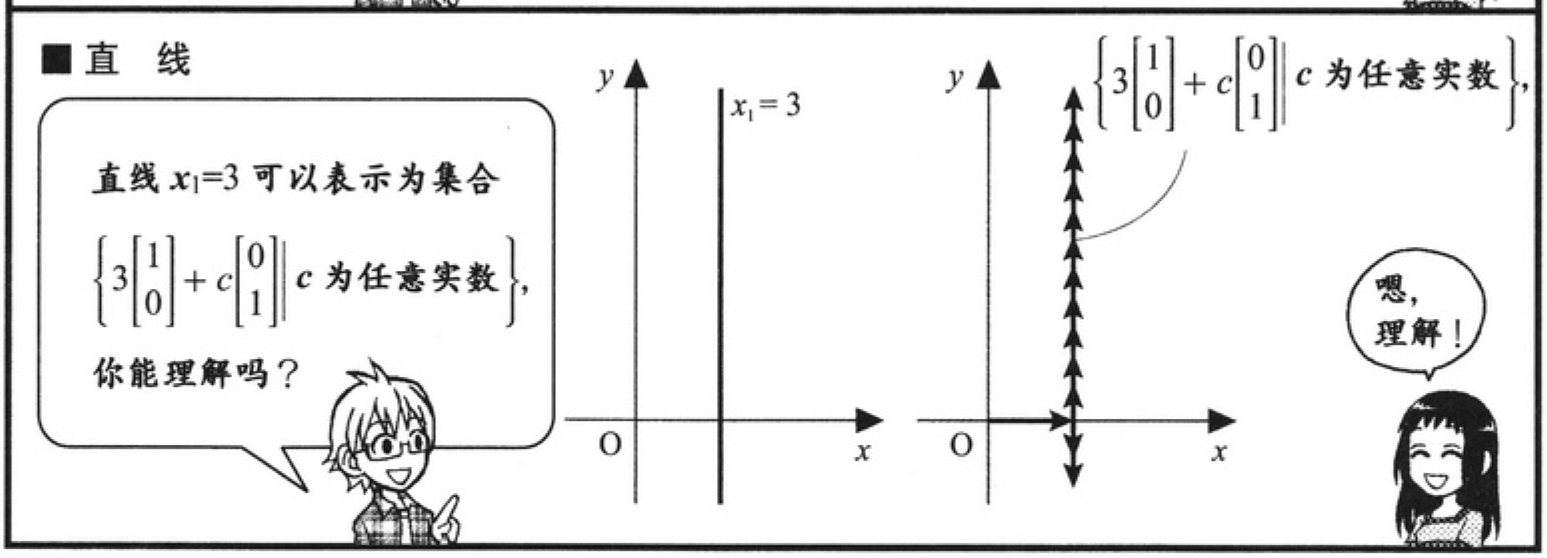
✻ 3. 向量表示 ✻
接着我要教一下用向量表示直线和空间等的方法，
因为这是一种独特的表示，所以你还需要慢慢适应。
好的……



■ 点
假设 c 为任意实数。点 $(0, c)$ 可以表示为向量 $c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，这一点你能理解吗？
点(0, c)
$c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$
y
x
O
嗯！

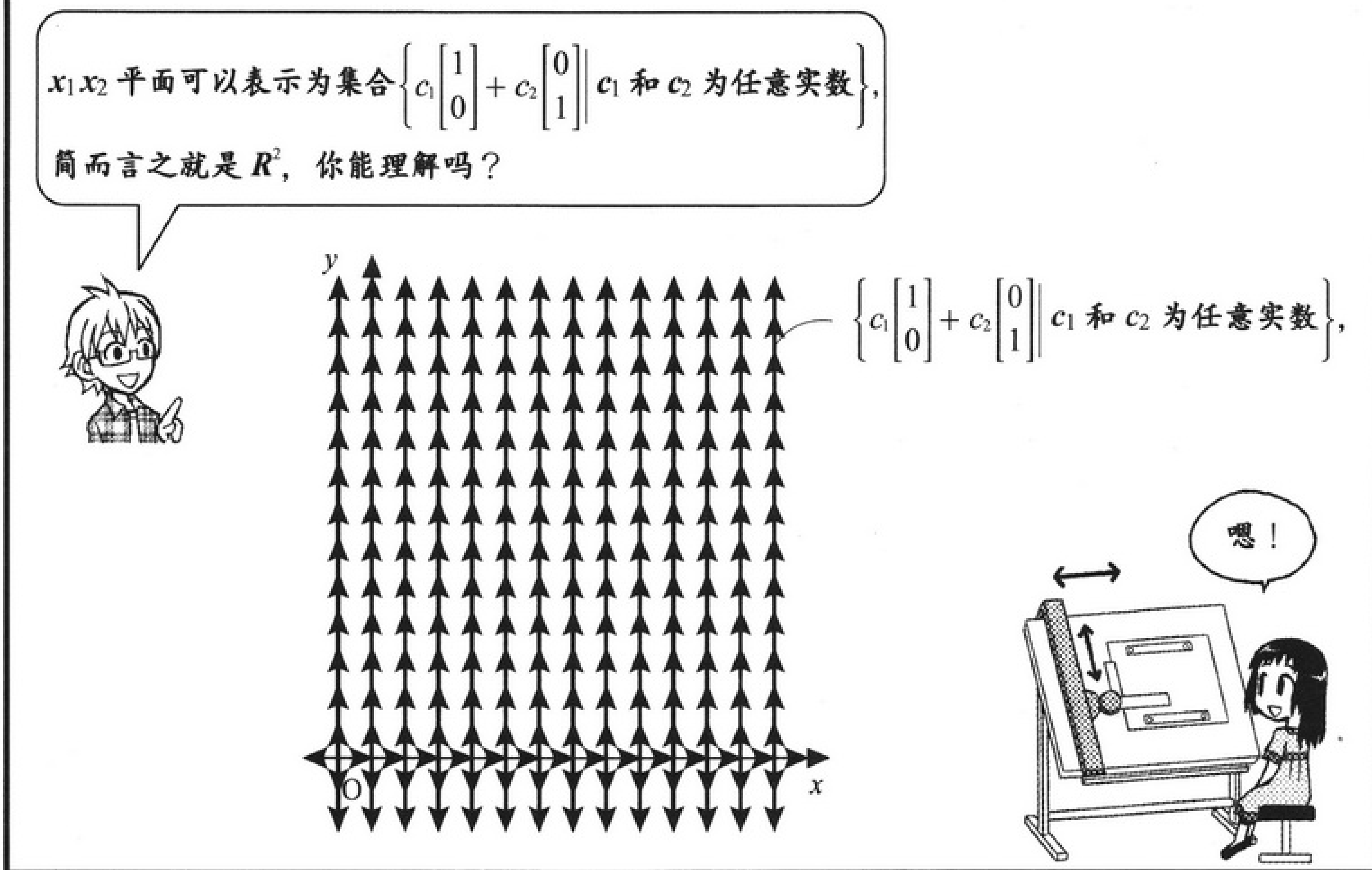


■ 轴
y 轴可以表示为集合 $\left\{c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \middle| c \text{ 为任意实数}\right\}$，你能理解吗？
y轴
$\left\{c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \middle| c \text{ 为任意实数}\right\}$
y
x
O
理解！

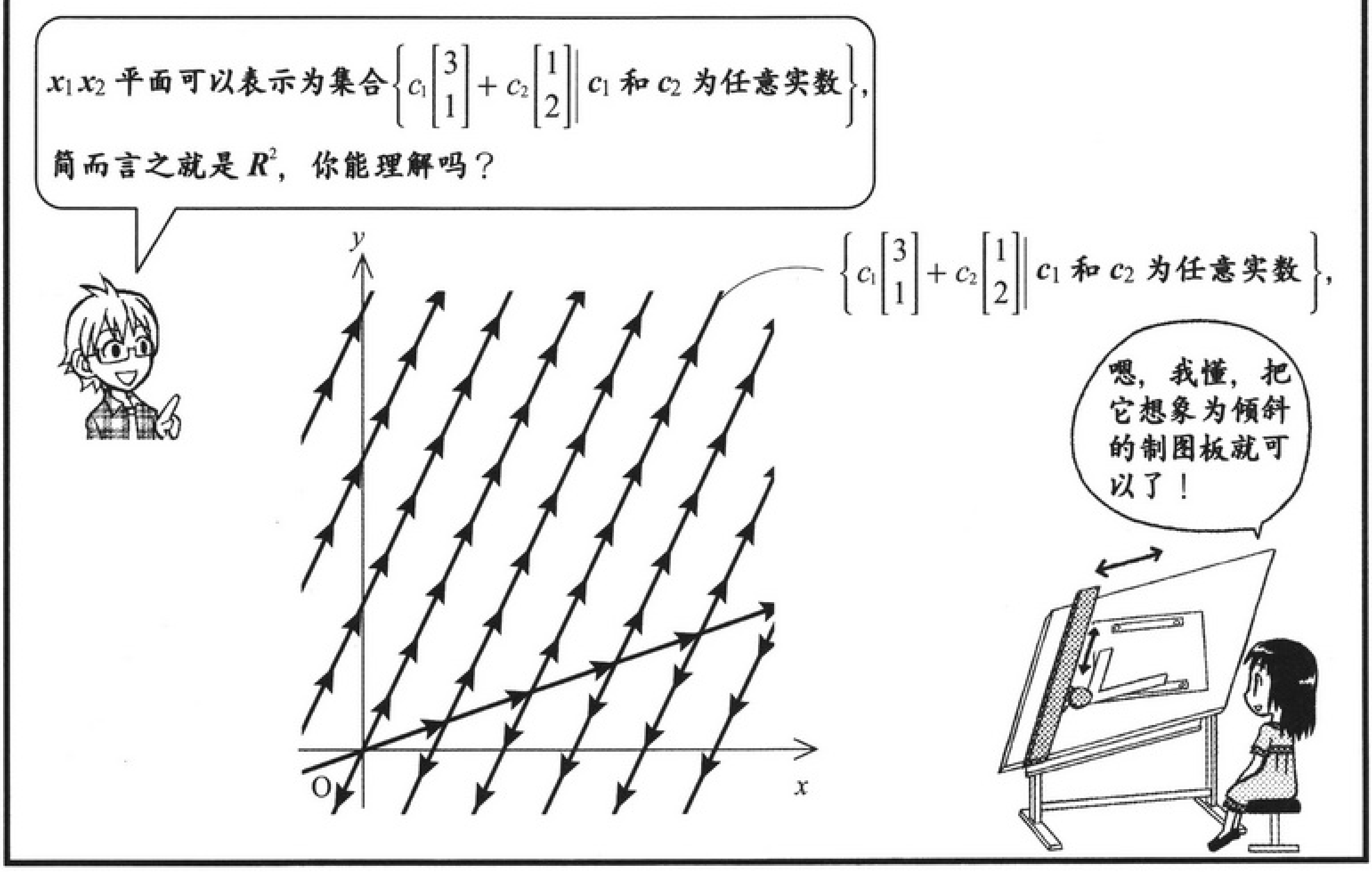


■ 直 线
直线 $x_1=3$ 可以表示为集合 $\left\{3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \middle| c \text{ 为任意实数}\right\}$，你能理解吗？
$x_1 = 3$
$\left\{3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \middle| c \text{ 为任意实数}\right\}$，
y
x
O
嗯，理解！

■ 平面 1


x_1x_2 平面可以表示为集合$\left\{c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\middle\| c_1 和 c_2 为任意实数\right\}$，
简而言之就是 R^2，你能理解吗？
y
O
x
$\left\{c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\middle\| c_1 和 c_2 为任意实数\right\}$，
嗯！

■ 平面 2

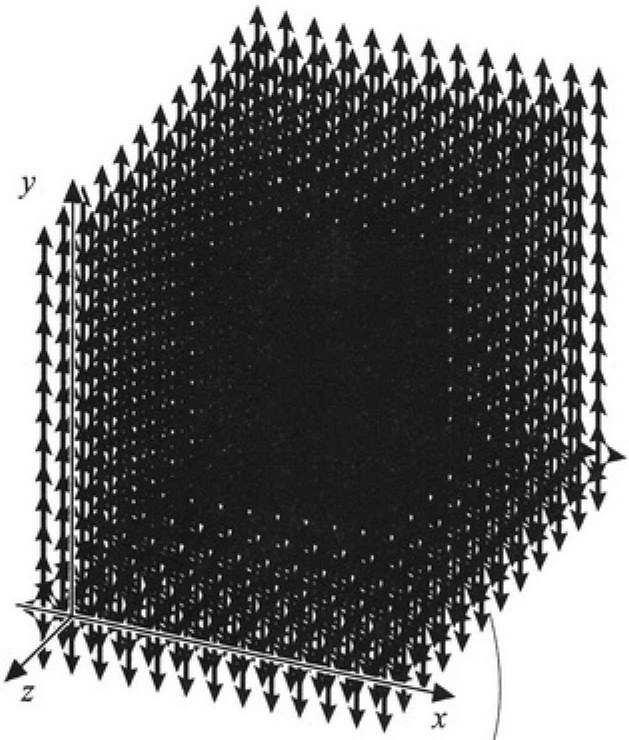

x_1x_2 平面可以表示为集合$\left\{c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\middle\| c_1 和 c_2 为任意实数\right\}$，
简而言之就是 R^2，你能理解吗？
y
O
x
$\left\{c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\middle\| c_1 和 c_2 为任意实数\right\}$，
嗯，我懂，把它想象为倾斜的制图板就可以了！

■ 空间 1

$x_1x_2x_3$ 空间可以表示为集合 $\left\{ c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \middle| \, c_1 \text{ 和 } c_2 \text{ 和 } c_3 \text{ 为任意实数} \right\}$，

简而言之就是 R^3，这一点，你能理解吗？





$$\left\{ c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \middle| \, c_1 \text{ 和 } c_2 \text{ 和 } c_3 \text{ 为任意实数} \right\}$$



■ 空间 2

$x_1x_2\cdots x_n$ 空间可以表示为

集合 $\left\{ c_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \cdots + c_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix} \middle| \, c_1, \; c_2 \cdots c_n \text{ 为任意实数} \right\}$，

简而言之就是 R^n，这一点，你能理解吗？






啊……
有点累了！
待会还要继续讲，我们稍微休息一会儿吧！
嗯，同意！
不过，百合野……
你为什么要加入空手道俱乐部呢？
嗯……
也，也没……
没有什么特别的理由啦！
？
来，我们接着上课吧！

第 6 章

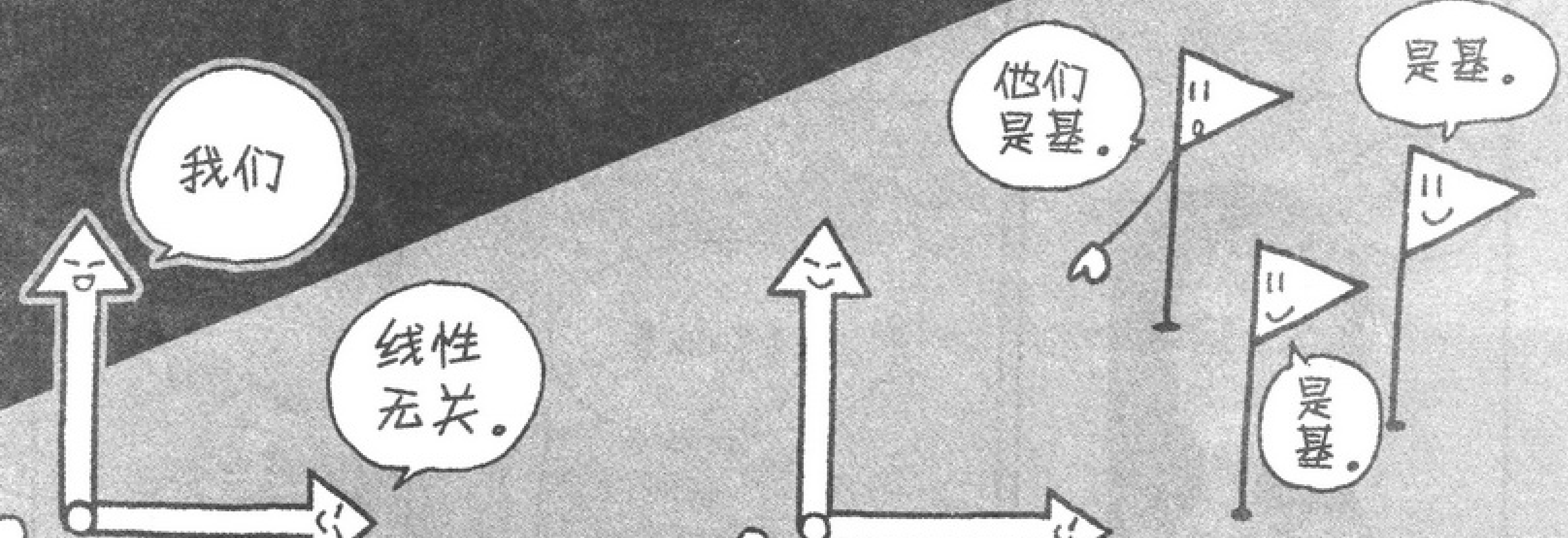
向量（续）

1. 线性无关

2. 基

3. 维　数

4. 坐　标





1. 线性无关

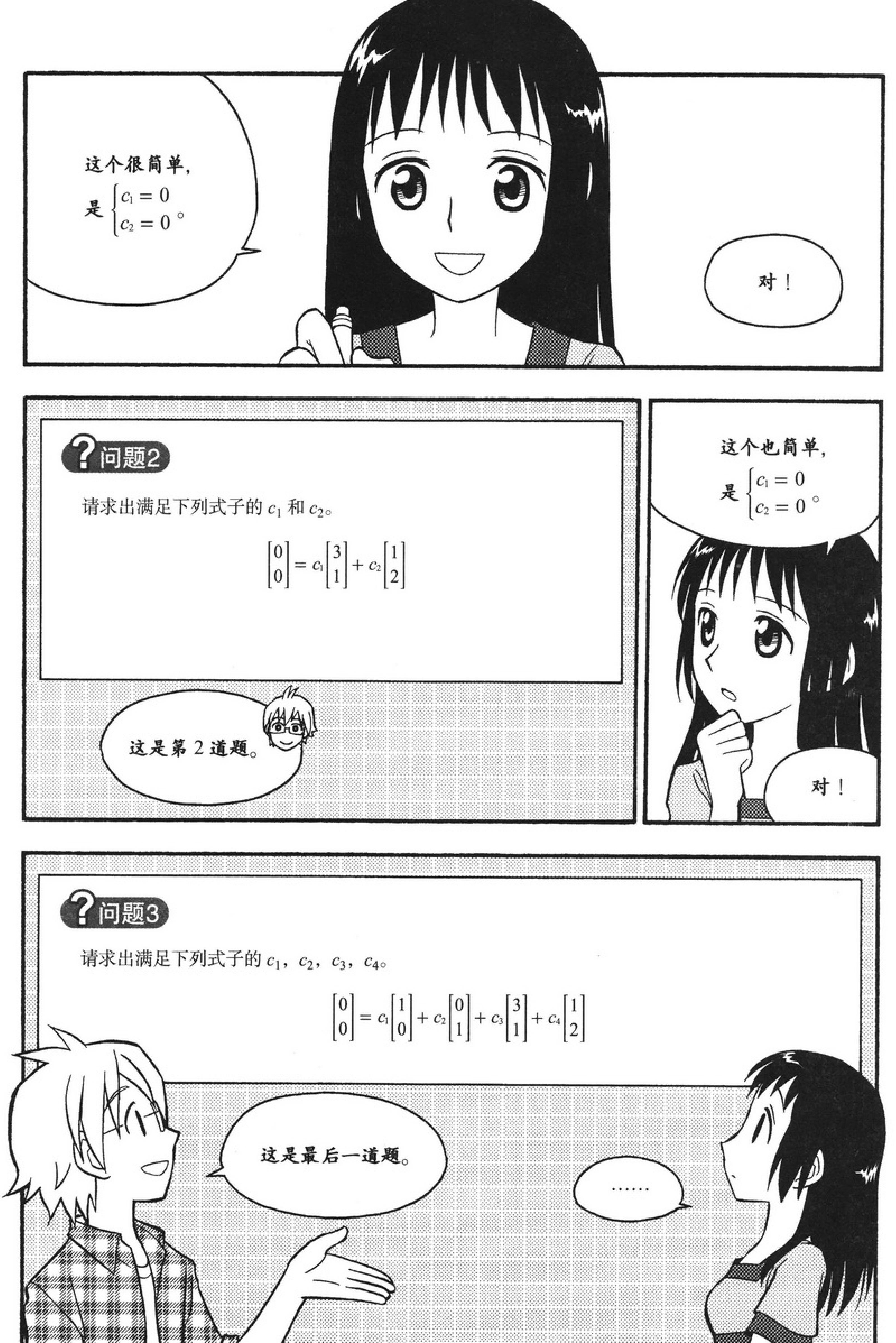


问题1

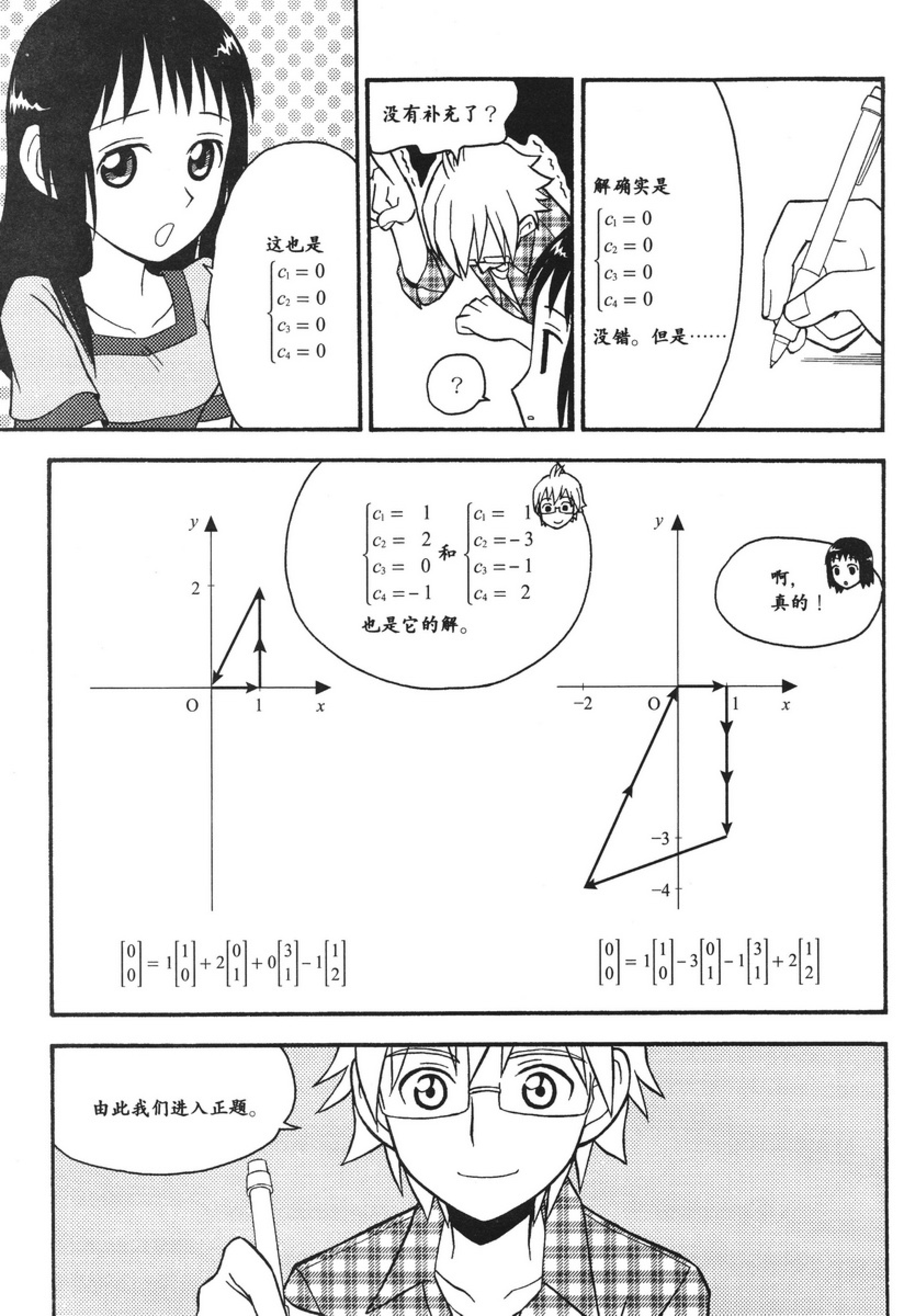
请求出满足下列式子的 c_1 和 c_2。

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

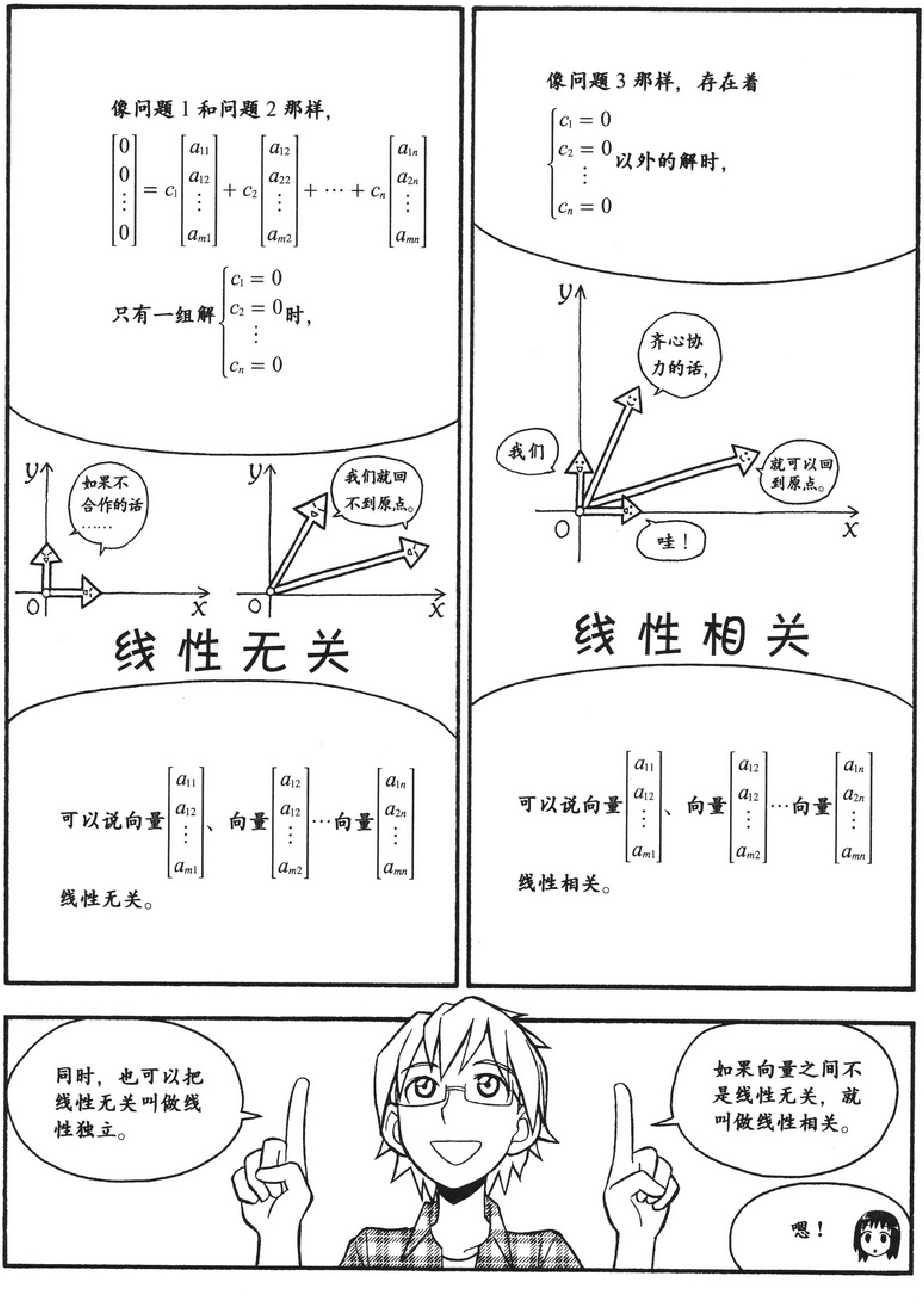




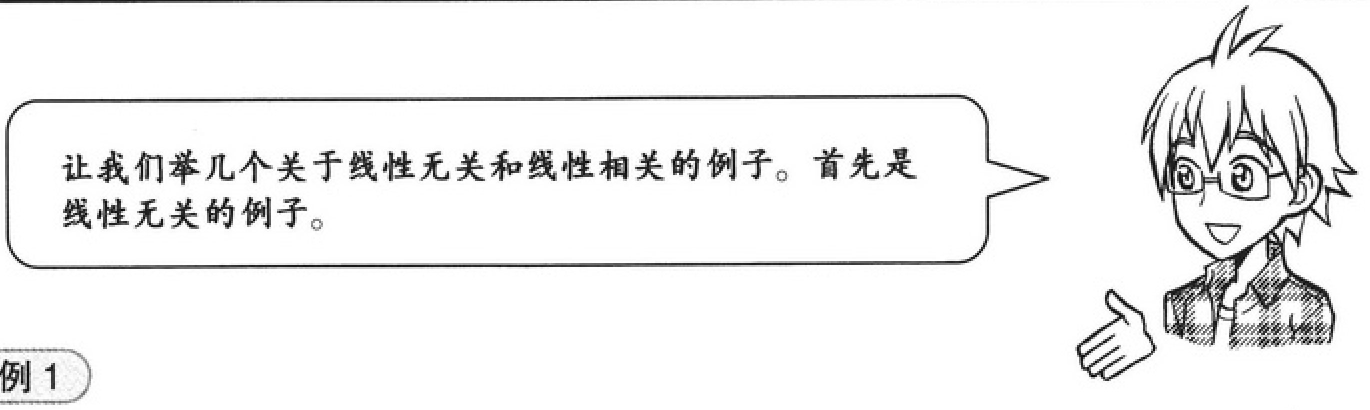
这个很简单，
是$\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\end{cases}$。
对！
问题2
请求出满足下列式子的 c_1 和 c_2。
$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$
这是第 2 道题。
这个也简单，
是$\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\end{cases}$。
对！
问题3
请求出满足下列式子的 c_1，c_2，c_3，c_4。
$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$
这是最后一道题。
……



这也是 $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$
没有补充了？
？
解确实是 $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0 \end{cases}$
没错。但是……
$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 2 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = -1 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -3 \\ c_3 = -1 \\ c_4 = 2 \end{cases}$
也是它的解。
啊，真的！
y 2 O 1 x
y −2 O 1 x −3 −4
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
由此我们进入正题。

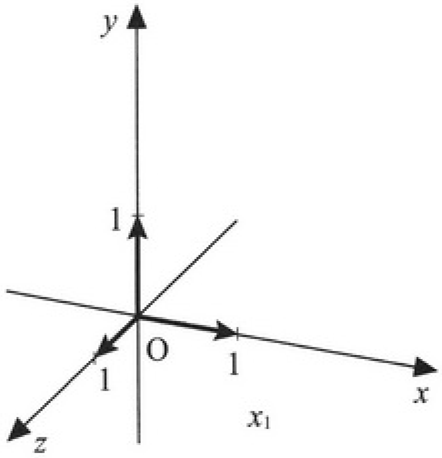


像问题 1 和问题 2 那样，
$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+c_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$
只有一组解 $\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\\vdots\\c_n=0\end{cases}$ 时，
如果不合作的话……
我们就回不到原点。
线性无关
可以说向量 $\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}$、向量 $\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{12}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}$ …向量 $\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$ 线性无关。
像问题 3 那样，存在着 $\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\\vdots\\c_n=0\end{cases}$ 以外的解时，
齐心协力的话，
我们
就可以回到原点。
哇！
线性相关
可以说向量 $\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{12}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}$、向量 $\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{12}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}$ …向量 $\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$ 线性相关。
同时，也可以把线性无关叫做线性独立。
如果向量之间不是线性无关，就叫做线性相关。
嗯！



例 1

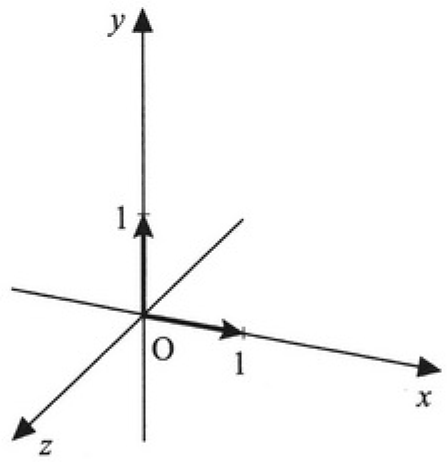
因为$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$的解，只有$\begin{cases}c_1=0\\c_2=0,\\c_3=0\end{cases}$



所以向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$线性无关。

例 2

因为$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$的解，只有$\begin{cases}c_1 = 0\\c_2 = 0\end{cases}$，



所以向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$线性无关。

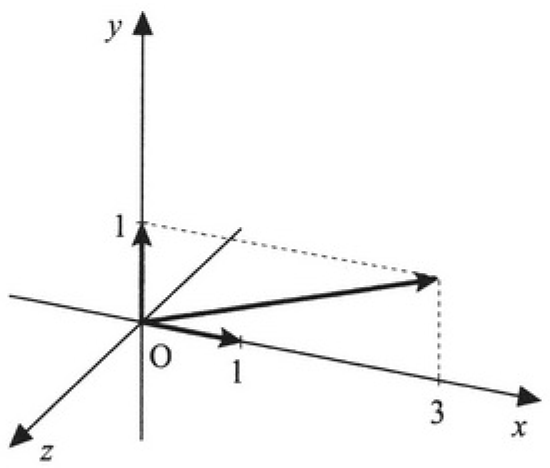


关于线性相关的例子。



例 1

因为$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$的解，不仅有$\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\c_3=0\end{cases}$，还有$\begin{cases}c_1=\ \ 3\\c_2=\ \ 1\\c_3=-1\end{cases}$等解，



所以向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$线性相关。

例 2

因为

$$\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$$

的解不仅有$\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\c_3=0\\c_4=0\end{cases}$，还有$\begin{cases}c_1=\ a_1\\c_2=\ a_2\\c_3=\ a_3\\c_4=-1\end{cases}$等解，所以向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$线性相关。

同样，因为

$$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}+\cdots+c_m\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}+c_{m+1}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}$$

的解不仅有$\begin{cases}c_1\ \ =0\\c_2\ \ =0\\\quad\vdots\\c_m\ \ =0\\c_{m+1}=0\end{cases}$，还有$\begin{cases}c_1\ \ =\ a_1\\c_2\ \ =\ a_2\\\quad\ \ \vdots\\c_m\ \ =\ a_m\\c_{m+1}=-1\end{cases}$等，所以向量$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{bmatrix}$线性相关。

2. 基



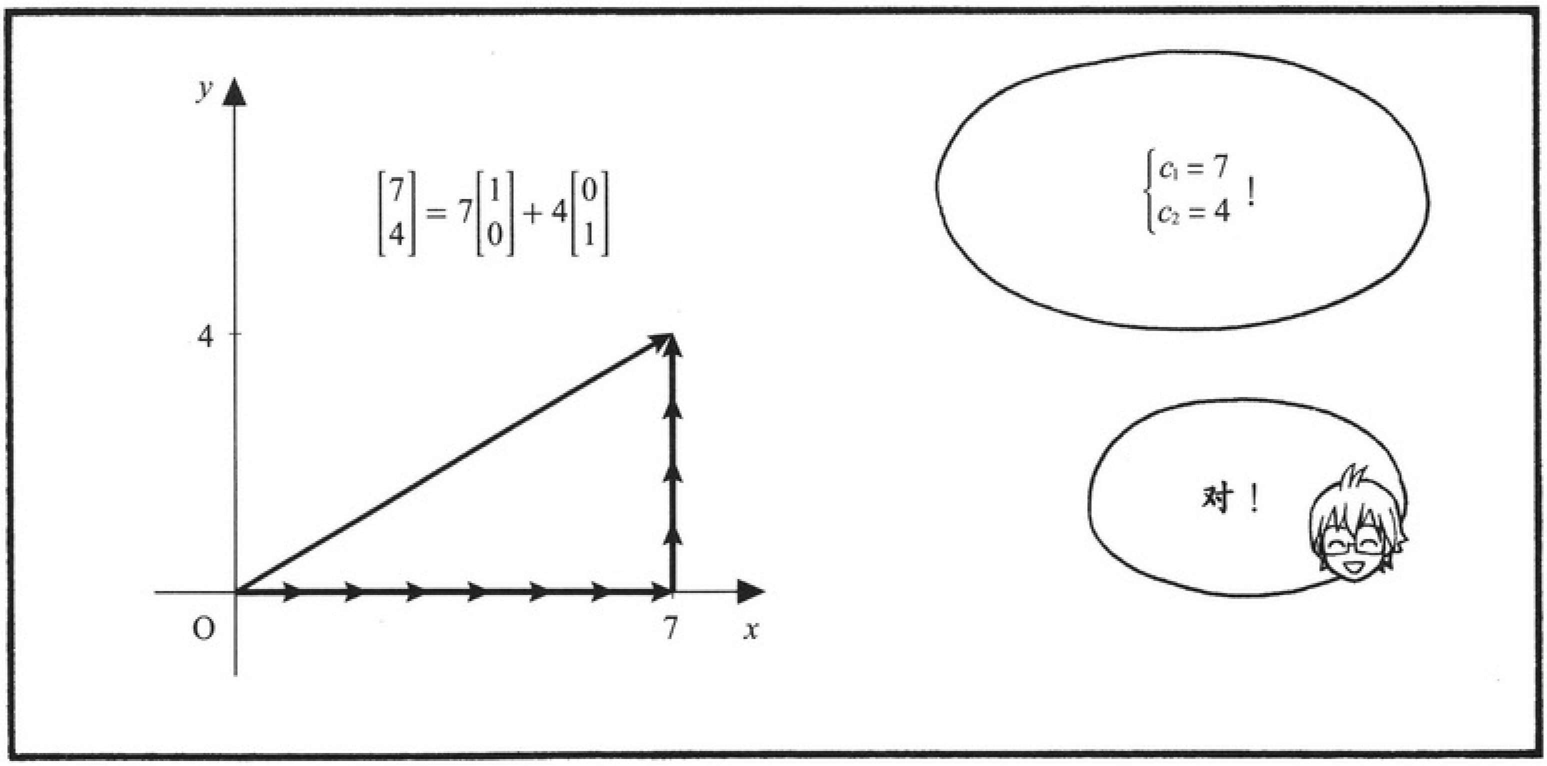


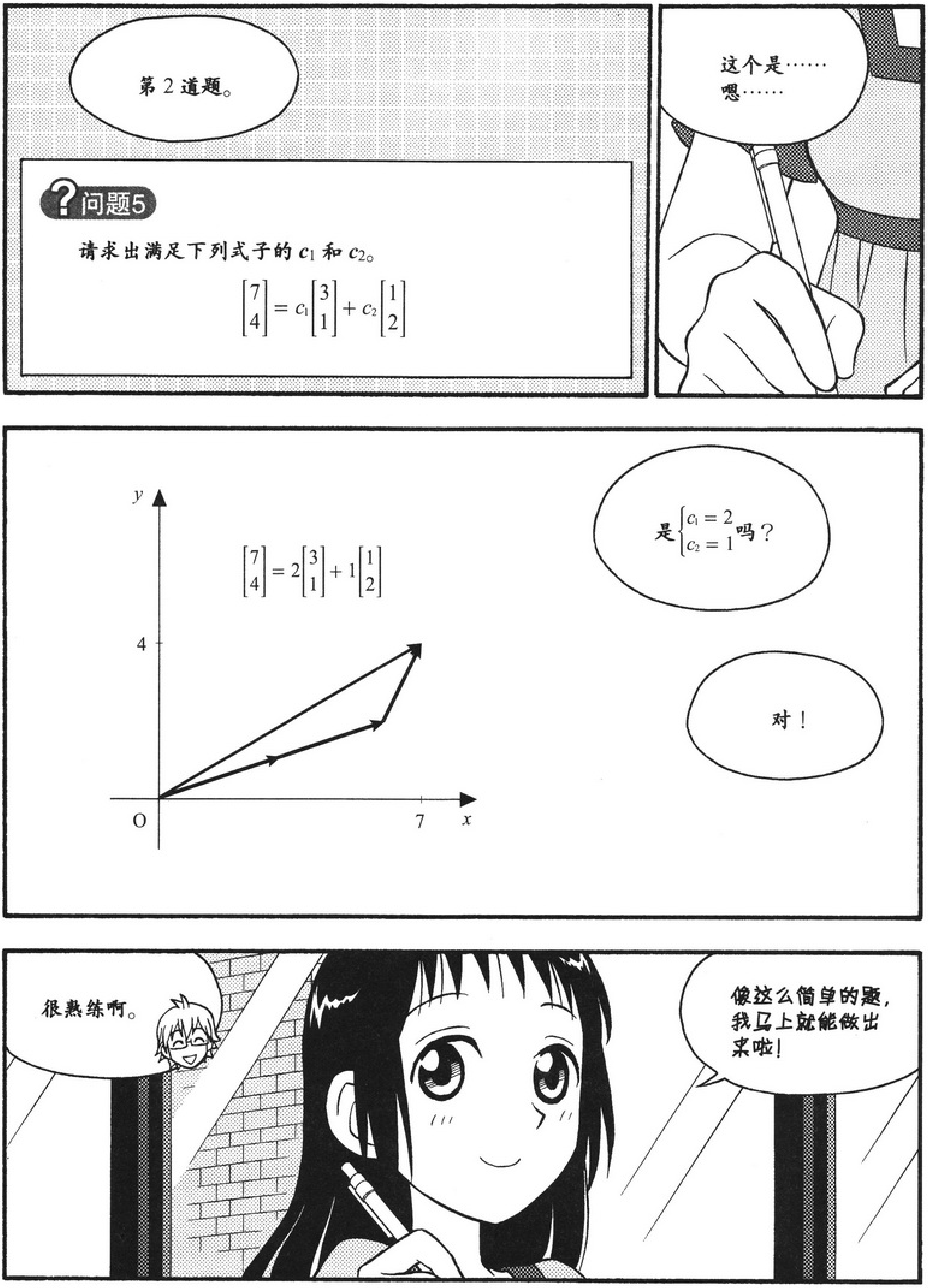


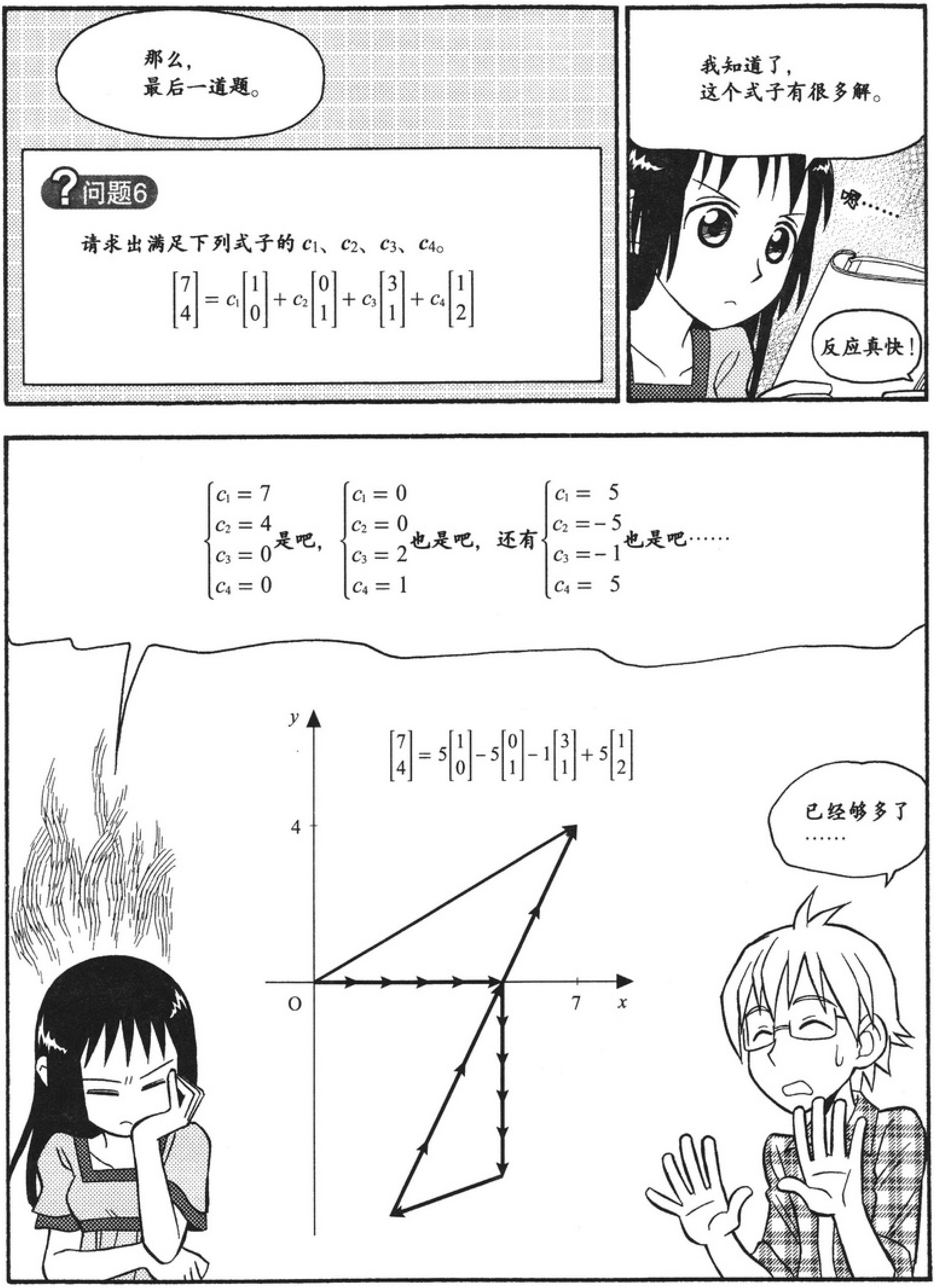
问题4

请求出满足下列式子的 c_1 和 c_2。

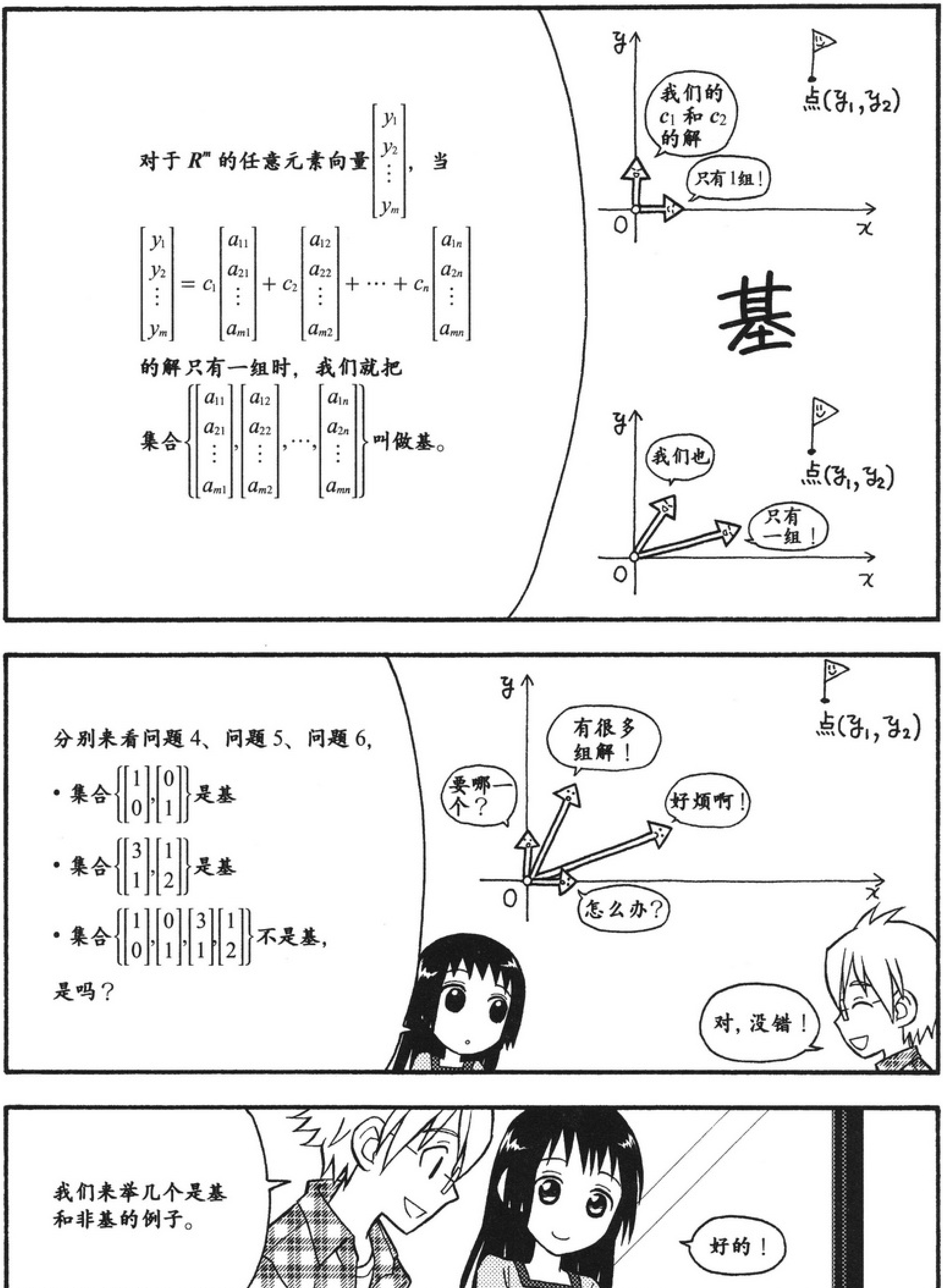
$$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

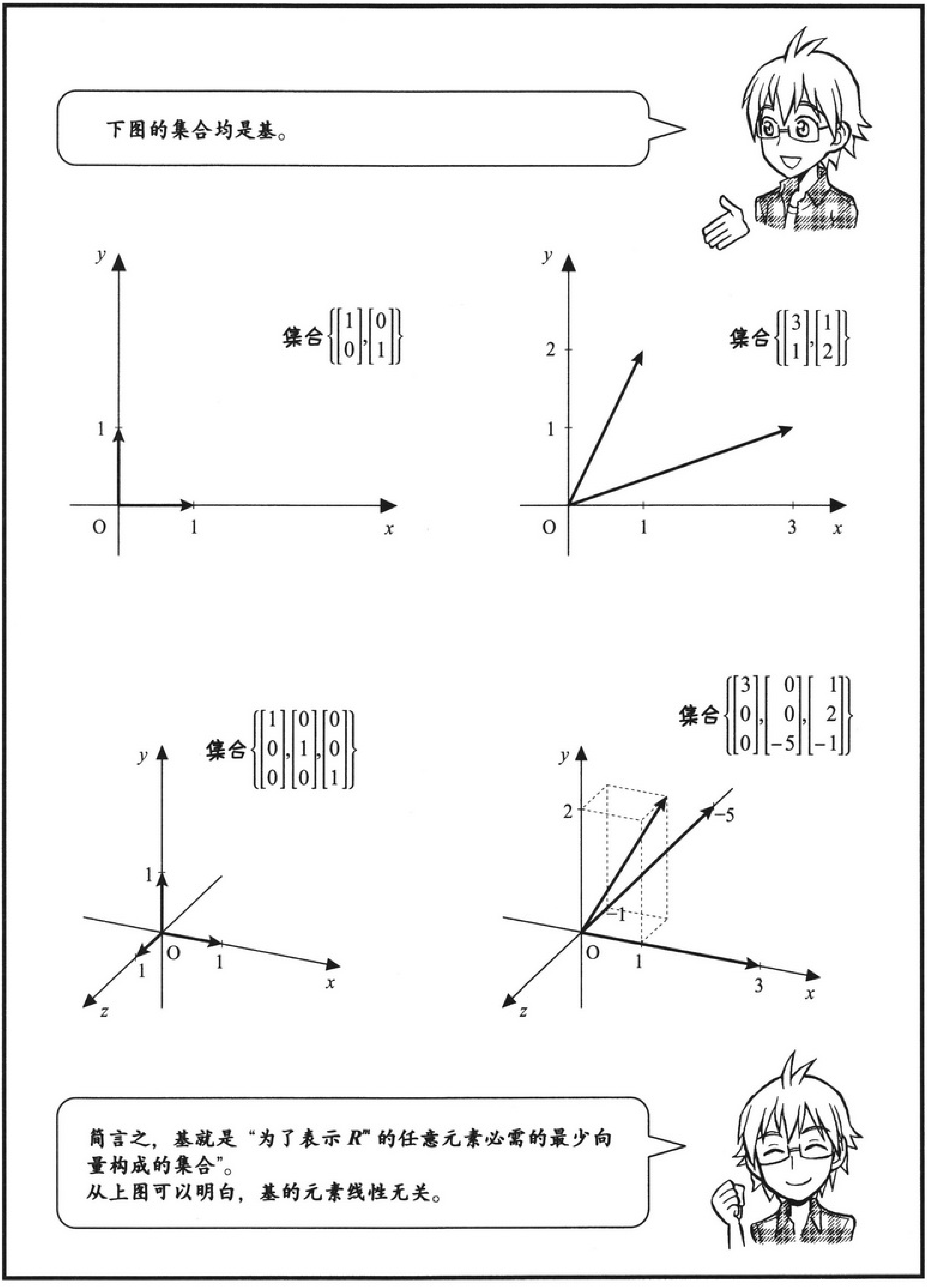



第 2 道题。
这个是……
嗯……
问题5
请求出满足下列式子的 c_1 和 c_2。
$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
y
4
O
7
x
是$\begin{cases}c_1=2\\c_2=1\end{cases}$吗？
对！
像这么简单的题，我马上就能做出来啦！
很熟练啊。



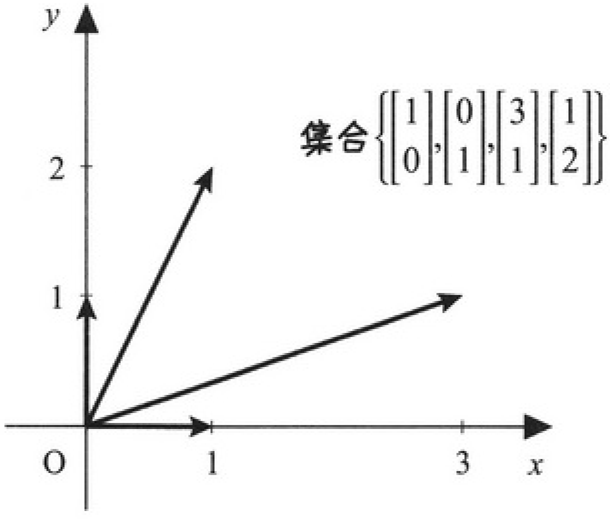
那么，
最后一道题。
问题6
请求出满足下列式子的 c_1、c_2、c_3、c_4。
$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
我知道了，
这个式子有很多解。
嗯……
反应真快！
$\begin{cases}c_1=7\\c_2=4\\c_3=0\\c_4=0\end{cases}$ 是吧，$\begin{cases}c_1=0\\c_2=0\\c_3=2\\c_4=1\end{cases}$ 也是吧，还有 $\begin{cases}c_1=5\\c_2=-5\\c_3=-1\\c_4=5\end{cases}$ 也是吧……
$\begin{bmatrix}7\\4\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
y
4
O
7
x
已经够多了
……


对于 R^m 的任意元素向量 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$，当
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$
的解只有一组时，我们就把
集合 $\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}$ 叫做基。
y
点(y_1, y_2)
我们的 c_1 和 c_2 的解
只有1组！
O
x
基
y
点(y_1, y_2)
我们也
只有一组！
O
x
分别来看问题 4、问题 5、问题 6，
• 集合 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ 是基
• 集合 $\left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ 是基
• 集合 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ 不是基，
是吗？
y
点(y_1, y_2)
有很多组解！
要哪一个？
好烦啊！
怎么办？
O
x
对，没错！
我们来举几个是基和非基的例子。
好的！


下图的集合均是基。
集合$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$
集合$\left\{\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
集合$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$
集合$\left\{\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}$
简言之，基就是“为了表示 R^m 的任意元素必需的最少向量构成的集合”。
从上图可以明白，基的元素线性无关。

下图的集合不是基。







为什么呢？这是因为对于 R^2 的任意元素向量$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$，

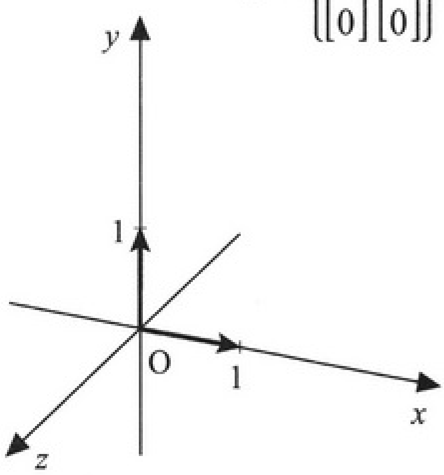
$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

存在着多个解。换句话说，就是因为它不能称作是“为了表示 R^2 的任意元素所必需的最少向量构成的集合”。

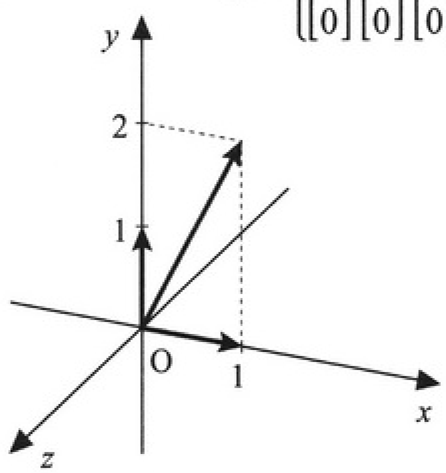
因为下图的集合均不能表示向量$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$等，即不能称作是“为了表示$R^3$的任意元素所必需的最少向量构成的集合”，所以不是基。



集合$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$



集合$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$



比如集合$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$是基，其元素也线性无关。

集合$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$虽然不是基，但是其元素线性无关。也就是说，即使不是基，其元素也有可能线性无关。



因为它们很相似，容易弄混淆，所以让我们来确认一下线性无关和基的不同之处。



线性无关

对于 $\boldsymbol{R}^m$ 的元素零向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$，当

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

只有 $\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n = 0 \end{cases}$ 这一组解 时，我们可以说向量 $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$、向量 $\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$ …向量 $\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$ 线性无关。

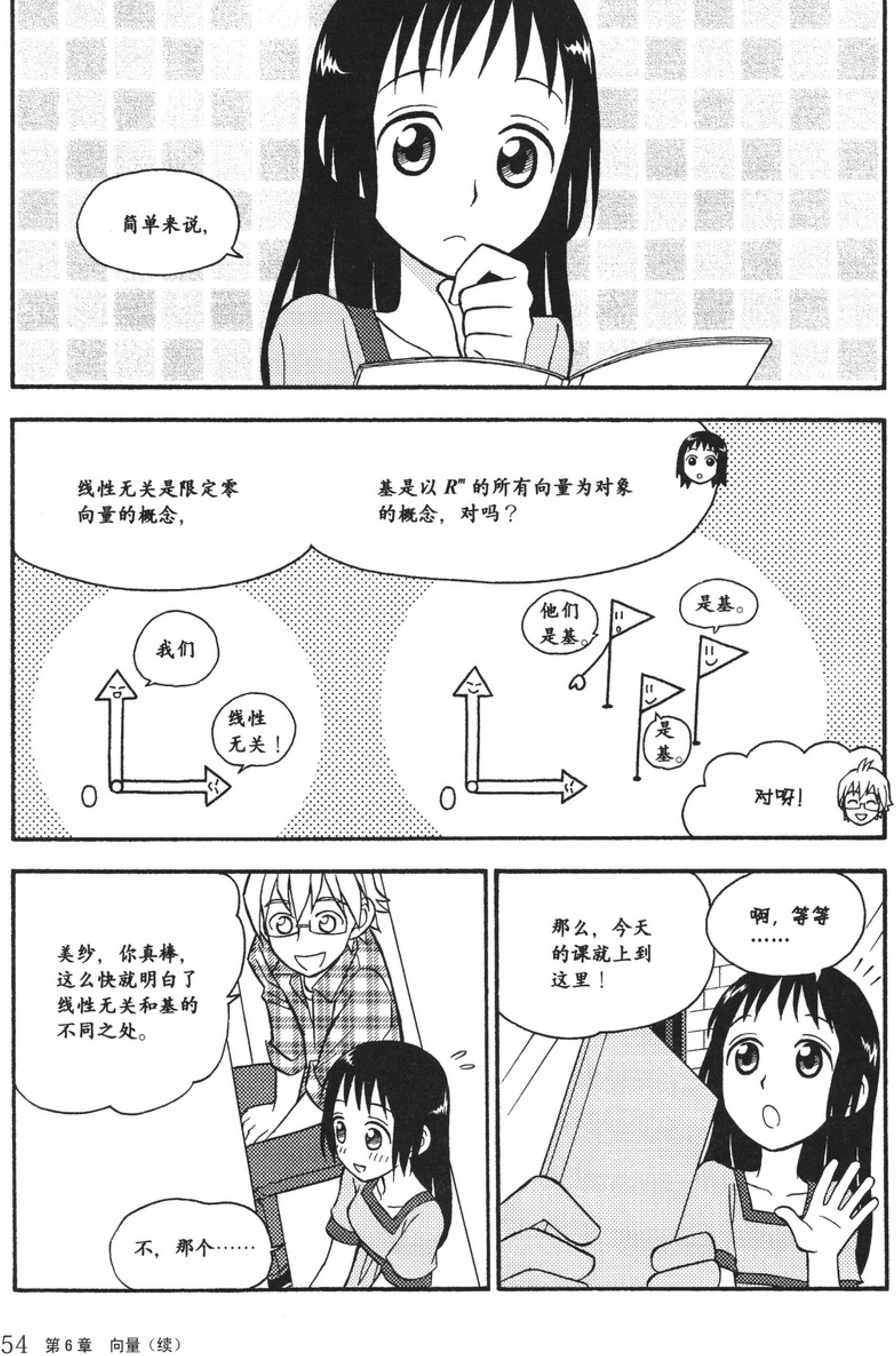
基

对于 $\boldsymbol{R}^m$ 的任意元素向量 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$，当

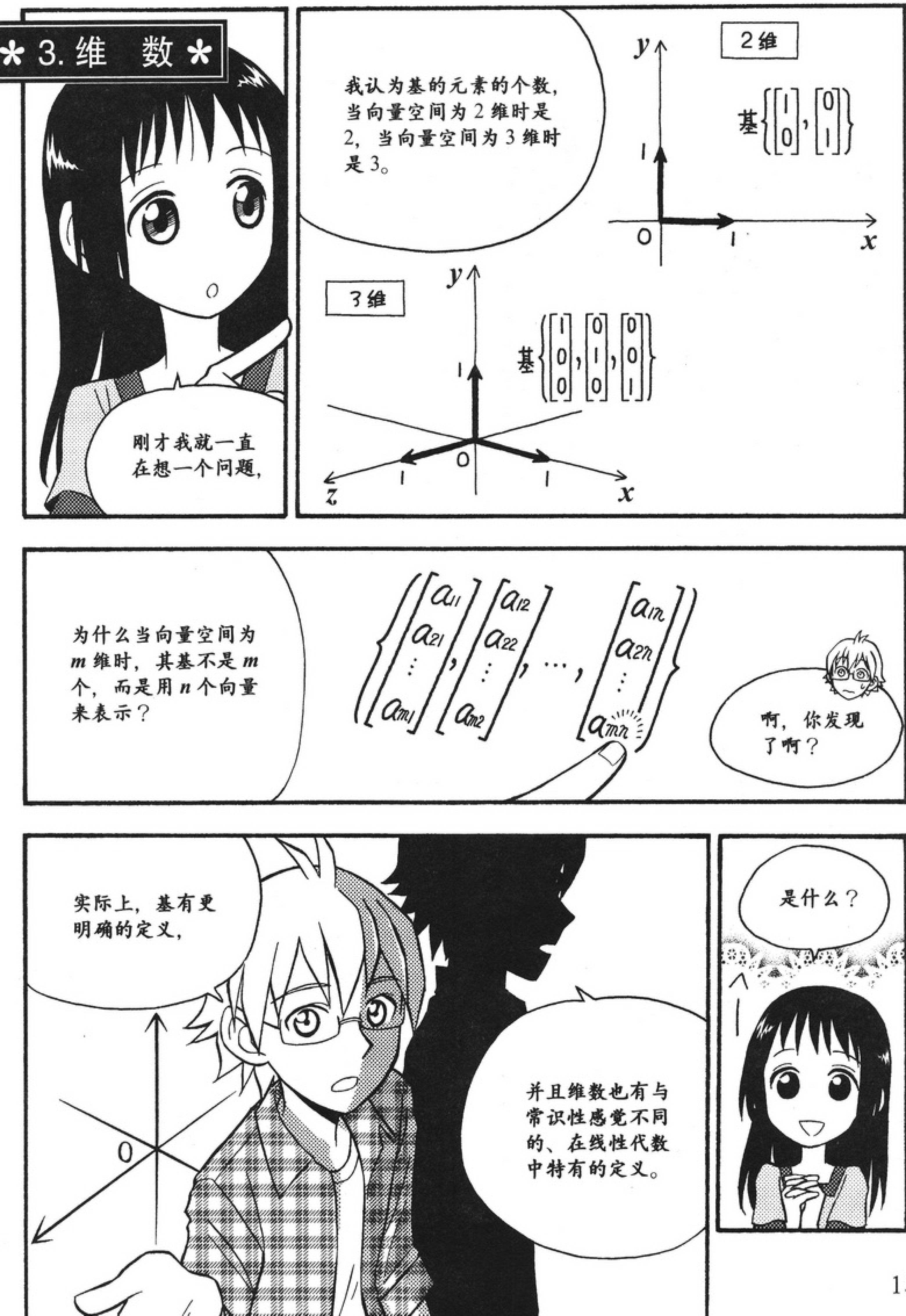
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

只有一组解时，我们把集合 $\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}$ 称作基。

基是“为了表示 $\boldsymbol{R}^m$ 的任意元素所必需的最少向量构成的集合”。



简单来说，
线性无关是限定零向量的概念，
基是以 R^m 的所有向量为对象的概念，对吗？
我们
线性无关！
他们是基。
是基。
是基。
对呀！
美纱，你真棒，这么快就明白了线性无关和基的不同之处。
不，那个……
那么，今天的课就上到这里！
啊，等等……


3. 维 数
刚才我就一直在想一个问题，
我认为基的元素的个数，当向量空间为 2 维时是 2，当向量空间为 3 维时是 3。
2维
基$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$
3维
基$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$
为什么当向量空间为 m 维时，其基不是 m 个，而是用 n 个向量来表示？
$\left\{\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}\right\}$
啊，你发现了啊？
实际上，基有更明确的定义，
并且维数也有与常识性感觉不同的、在线性代数中特有的定义。
是什么？



你想知道吗？
难吗？
不难，
但是很抽象。
不过，难得美纱这么感兴趣，我就来说说吧！
好，好吧……
要理解基和维，就必须了解什么叫子空间。
子空间
我先来解释一下什么是子空间吧。
3.1 子空间
粗略地说，这就是子空间。
$\mathbb{R}^m$
$\mathbb{W}$
它就是子集吗？
不，不是。准确地说……

子空间

假设 c 为任意实数。

若 $\boldsymbol{R}^m$ 的子集 W 满足这两个条件：

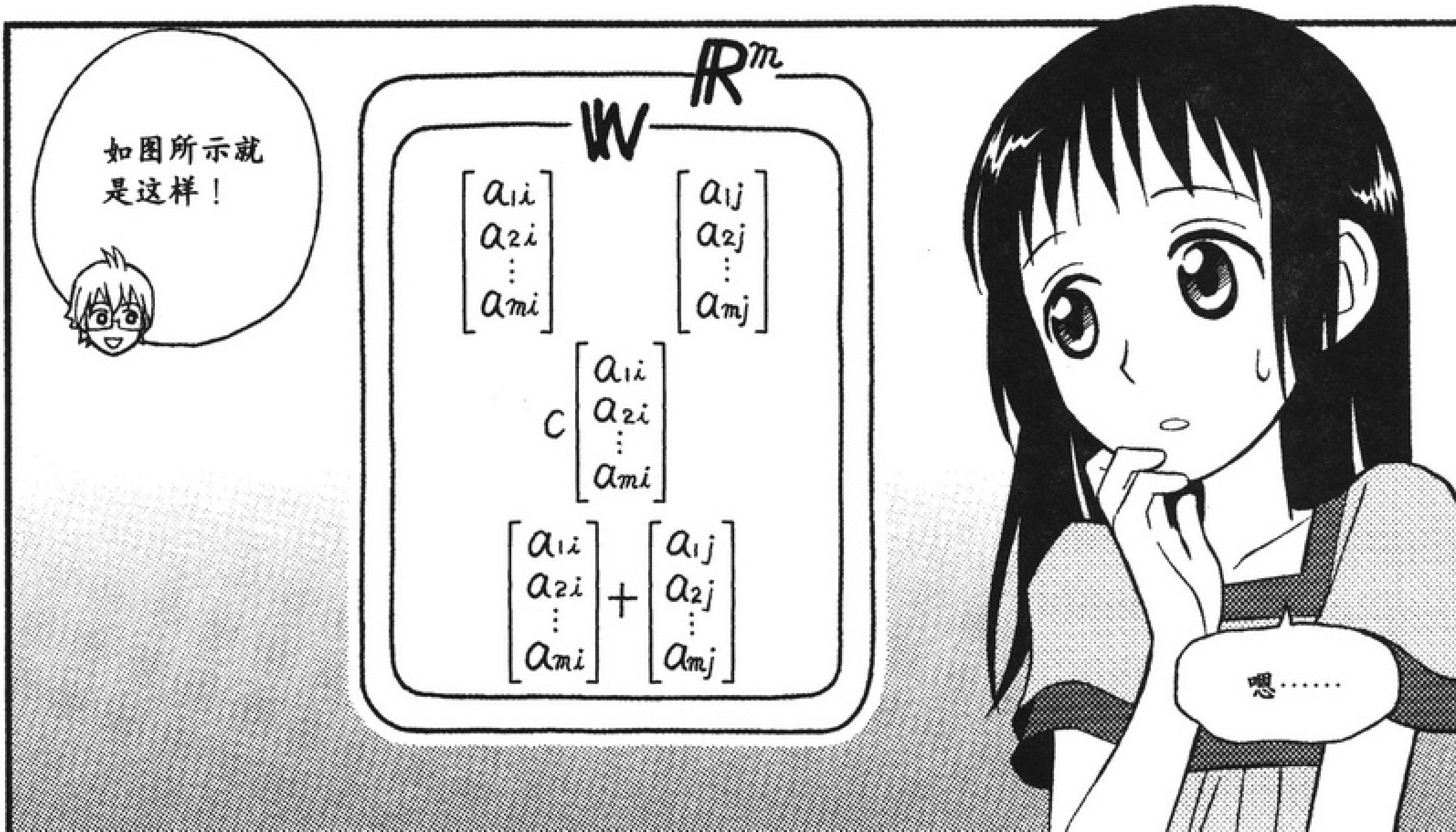
> ① W 的任意元素的 c 倍也是 W 的元素。
>
> ② W 的任意元素的和也是 W 的元素。

即满足这两个条件时，

> ① 如果 $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in W$，那么 $c\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in W$
>
> ② 如果 $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \in W$ 并且 $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in W$，那么 $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in W$

我们就把 W 叫做“$\boldsymbol{R}^m$ 的线性子空间，简称**子空间**”。





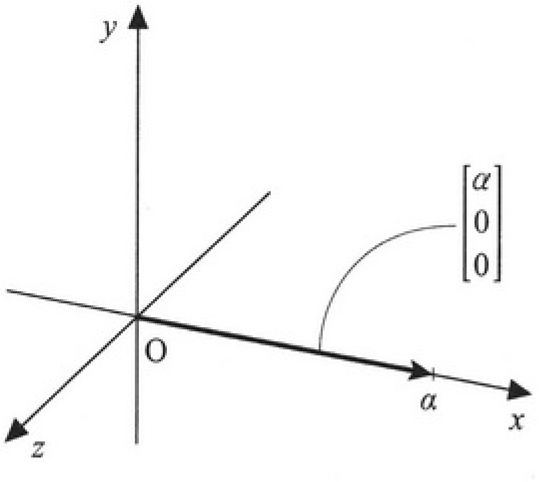
前面一页的解释非常抽象，到底子空间是什么，我们还不是很明白。为了更加明确它的概念，让我们来举几个是子空间的例子和非子空间的例子。
粗略地说，子空间就是“通过原点的直线”、“通过原点的平面”等。



■ 子空间的例子

假设 c 为任意实数，

集合$\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix}\middle|\ \alpha\text{ 为任意实数}\right\}$，也就是说 x 轴是 $\boldsymbol{R}^3$ 的子空间。



为什么呢？

这是因为

① $c\begin{bmatrix}\alpha_1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\alpha_1\\0\\0\end{bmatrix}\in\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix}\middle|\ \alpha\text{ 为任意实数}\right\}$

② $\begin{bmatrix}\alpha_1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\0\\0\end{bmatrix}\in\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\0\\0\end{bmatrix}\middle|\ \alpha\text{ 为任意实数}\right\}$

满足子空间成立的两个条件。

■ 不是子空间的例子

假设 c 为任意实数，

集合 $\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha \text{ 为任意实数} \right\}$，不是 $\boldsymbol{R}^3$ 的子空间。

为什么呢？

这是因为

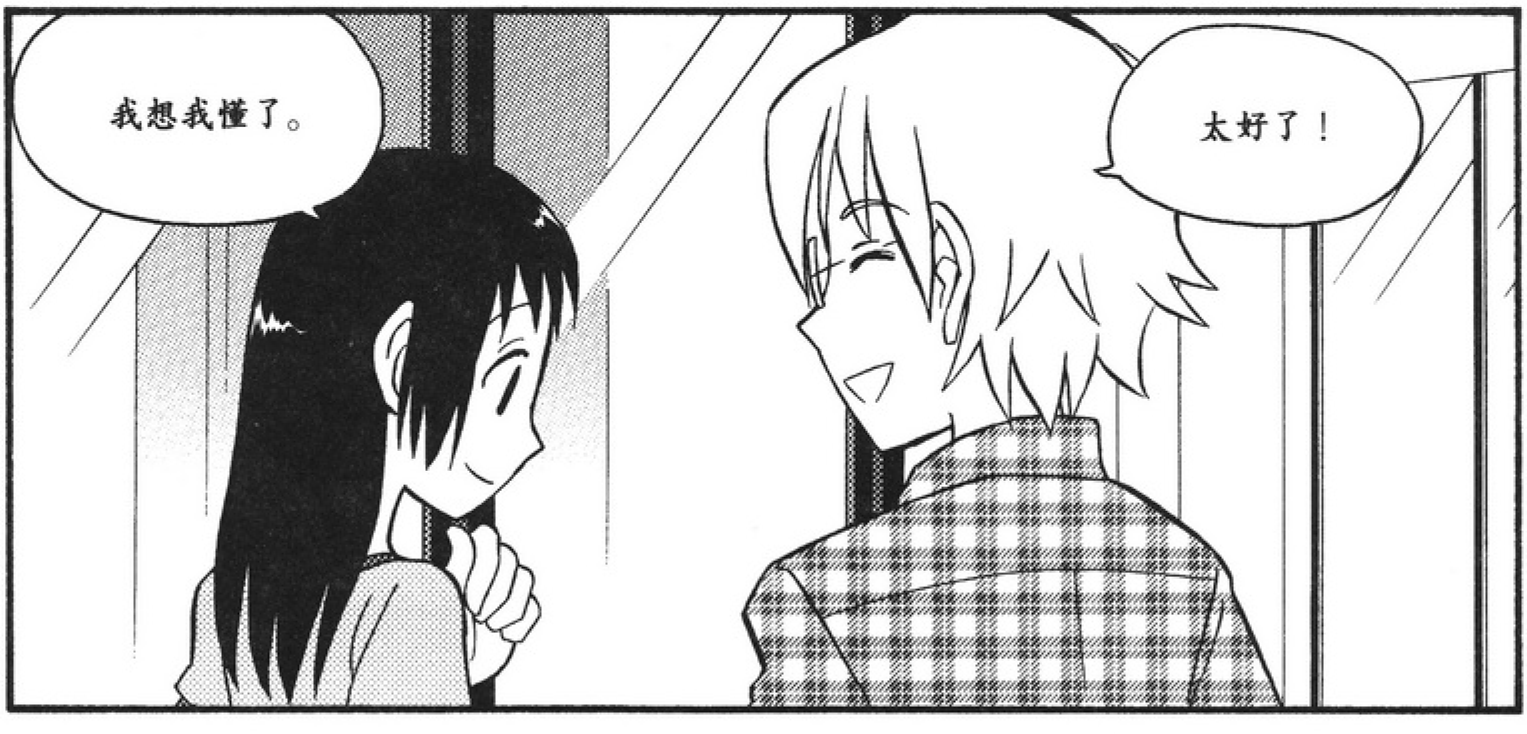
① $c\left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} c\alpha_1 \\ c\alpha_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} c\alpha_1 \\ (c\alpha_1)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha \text{ 为任意实数} \right\}$

② $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 \\ (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha^2 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \alpha \text{ 为任意实数} \right\}$

不满足子空间成立的两个条件。

有的读者或许会这样想。比如，若 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 的话，①和②就不会是“≠”，就会变成“＝”，就能够满足①和②的条件。确实如此。但是，集合的“任意”元素不能满足①和②的条件，就不能称之为子空间。请再仔细看一下第 157 页的概念。





特别地，以下的子空间被称为“由向量空间生成的子空间”。



由向量空间生成的子空间

若向量$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$…向量$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$为 $\boldsymbol{R}^m$ 的元素。

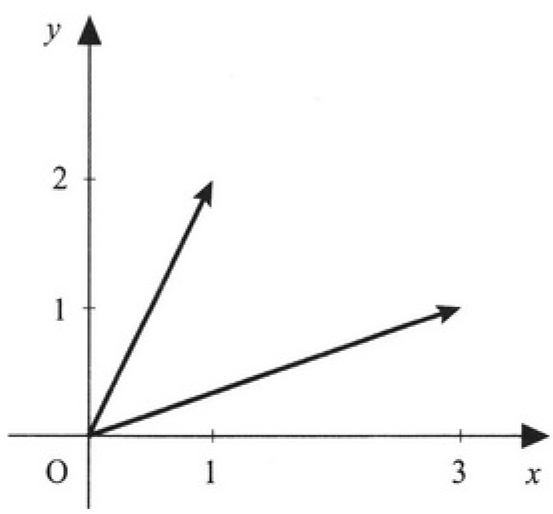
我们把集合

$$\left\{ c_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \middle| \, c_1\text{、}c_2\cdots c_n \text{ 为任意实数} \right\}$$

称作由“向量$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$…向量$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$生成的 $\boldsymbol{R}^m$ 的子空间”。

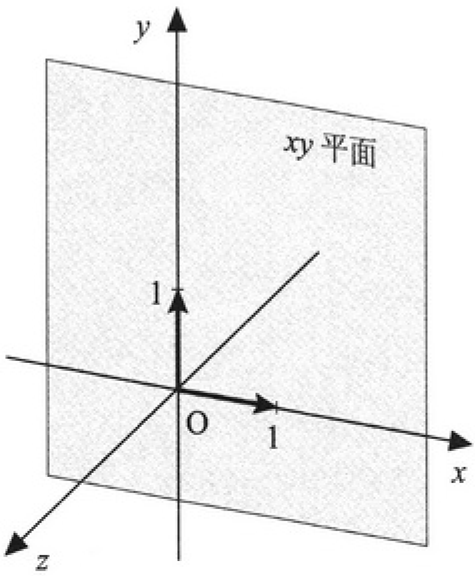
例 1

集合$\left\{ c_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \middle| \, c_1\text{、}c_2 \text{ 为任意实数} \right\}$，也就是说平面 xy 是“由向量$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$生成的 $\boldsymbol{R}^2$ 的子空间”。



例 2

集合$\left\{c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\middle|\, c_1、c_2 \text{为任意实数}\right\}$，也就是说平面 xy 是“由向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$生成的 $\boldsymbol{R}^3$ 的子空间”。

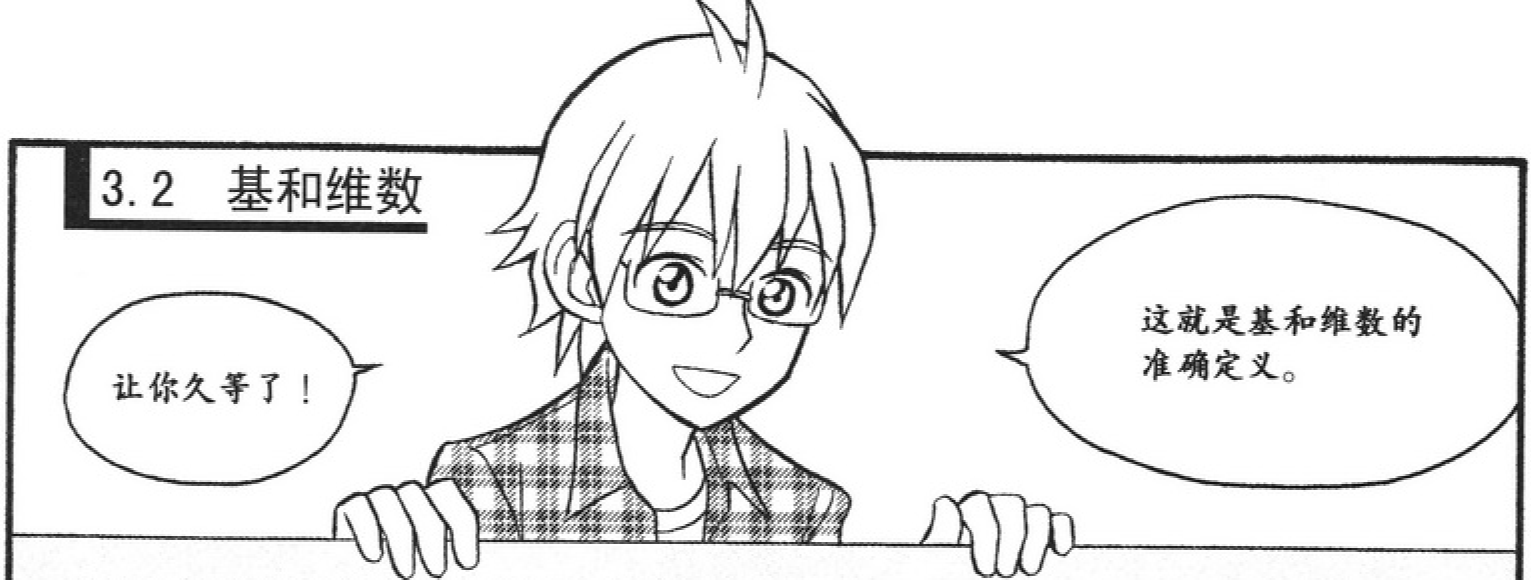


从例 1 中可以得出：$\boldsymbol{R}^m$ 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的子空间。

从例 1、例 2、第 158 页的例子中可以得出，无论哪个子空间都必然包含零向量$\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$。



3.2 基和维数



基和维数

假设 W 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的子空间，向量$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$…向量$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$是 W 的线性无关的元素。

当$W = \left\{ c_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \middle| \, c_1\text{、}c_2 \cdots c_n \text{ 为任意实数} \right\}$

这一等式成立时，我们就把集合$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \cdots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \right\}$叫做“子空间 W 的基”，把基元素的个数 n 的值叫做“子空间 W 的维数”。



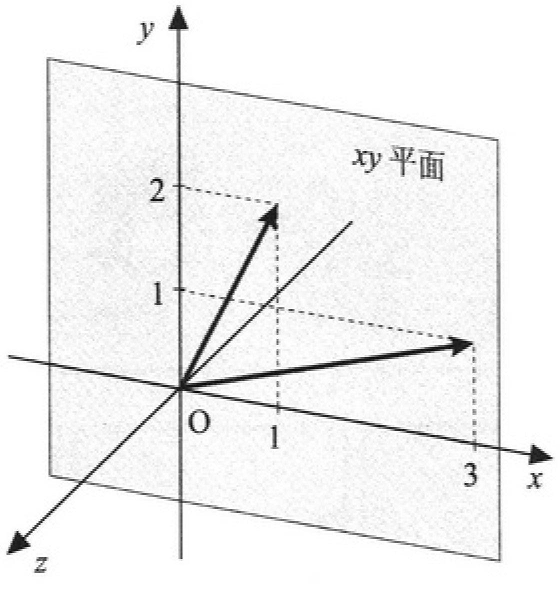
接下来再举几个例子，这样你可能会更明白。



例

为了便于解释，我就把 xy 平面称为 W。

W 是 $\boldsymbol{R}^3$ 的子空间，向量 $\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$、向量 $\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ 是 W 的线性无关的元素。

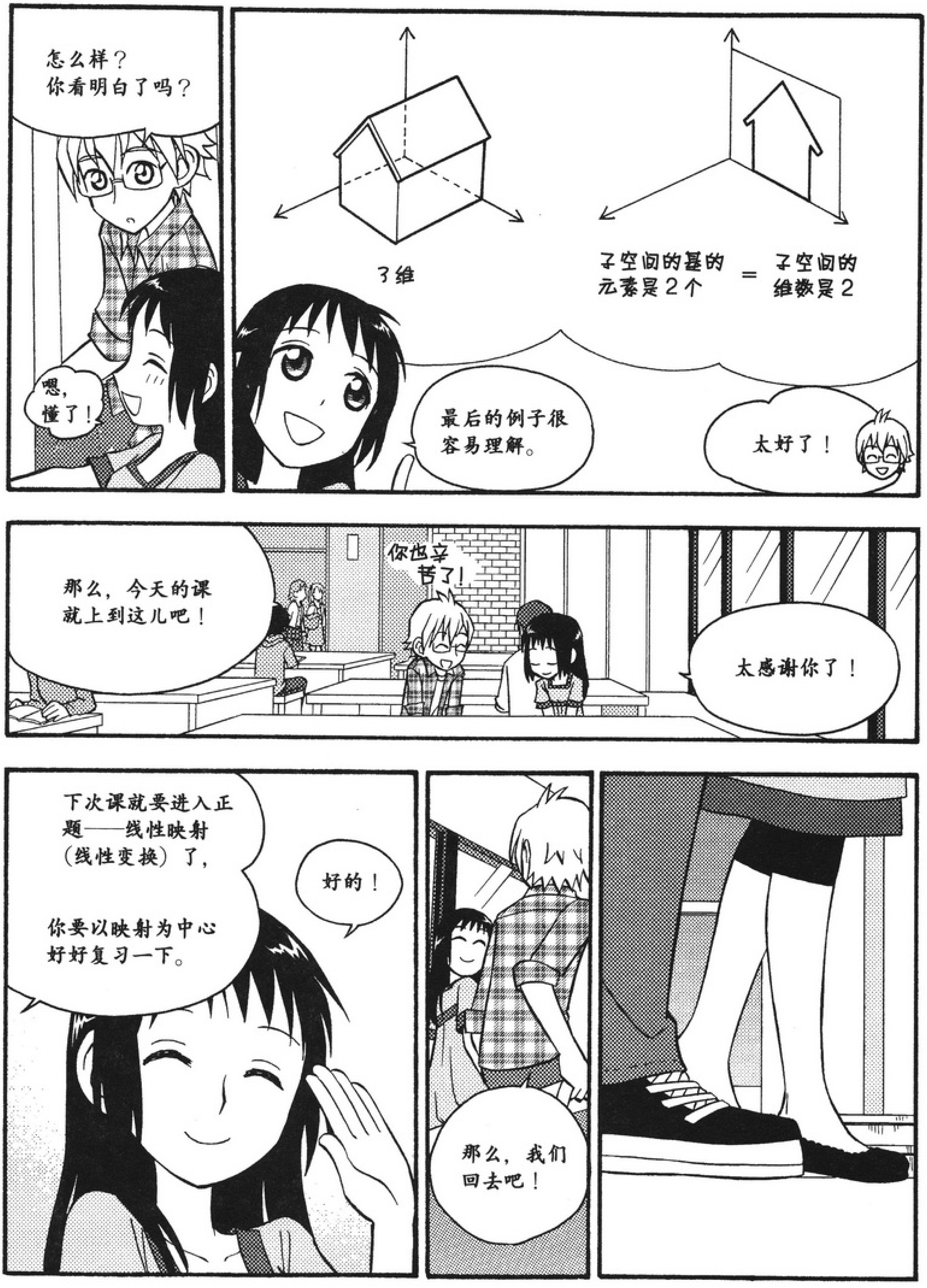




显然，

$$W=\left\{c_1\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\middle|\ c_1、c_2\ \text{为任意实数}\right\}$$

这一等式成立。因此集合 $\left\{\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}\right\}$ 是“子空间 W 的基”，“子空间的维数”是 2。


怎么样？
你看明白了吗？
3维
子空间的基的元素是2个
=
子空间的维数是2
嗯，懂了！
最后的例子很容易理解。
太好了！
那么，今天的课就上到这儿吧！
你也辛苦了！
太感谢你了！
下次课就要进入正题——线性映射（线性变换）了，
你要以映射为中心好好复习一下。
好的！
那么，我们回去吧！


……
嗯!
还有……
那个……
我刚才没有说
……
?
我之所以加入
空手道部,
是想变得强壮些。
因为……
我非常瘦弱……
那……

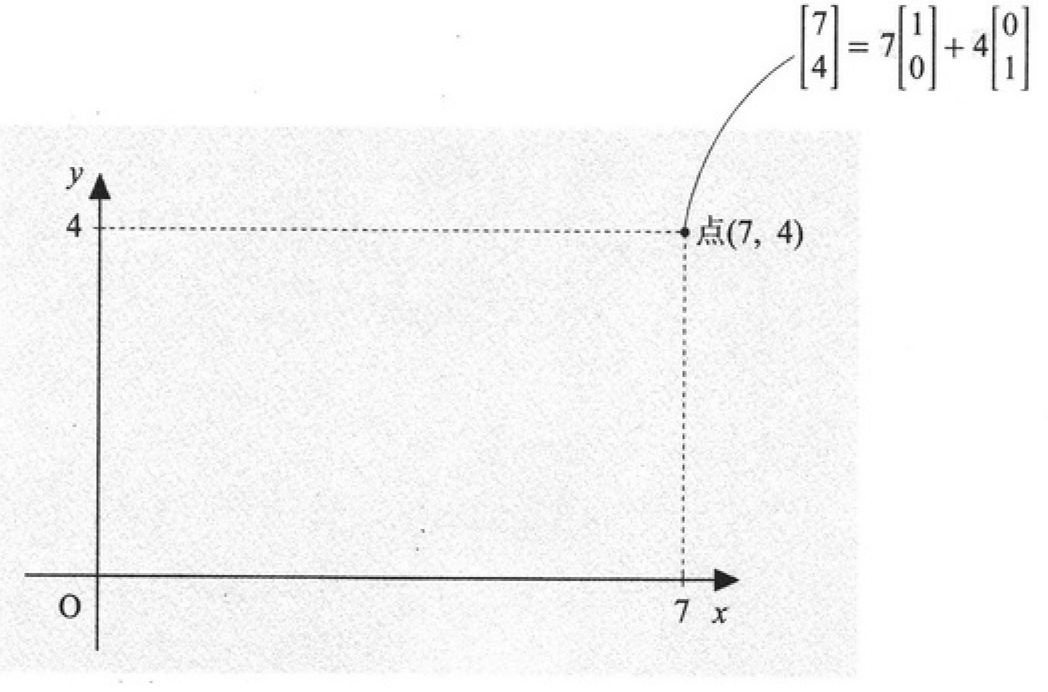

那我做的
便当……
今后还需要吧？
嗯！
那我就做，这样你就能
经得住哥哥的严格训
练了，超级体能便当！
谢谢你，美纱！
呵呵，这个就
交给我吧！

✽ 4. 坐　标 ✽

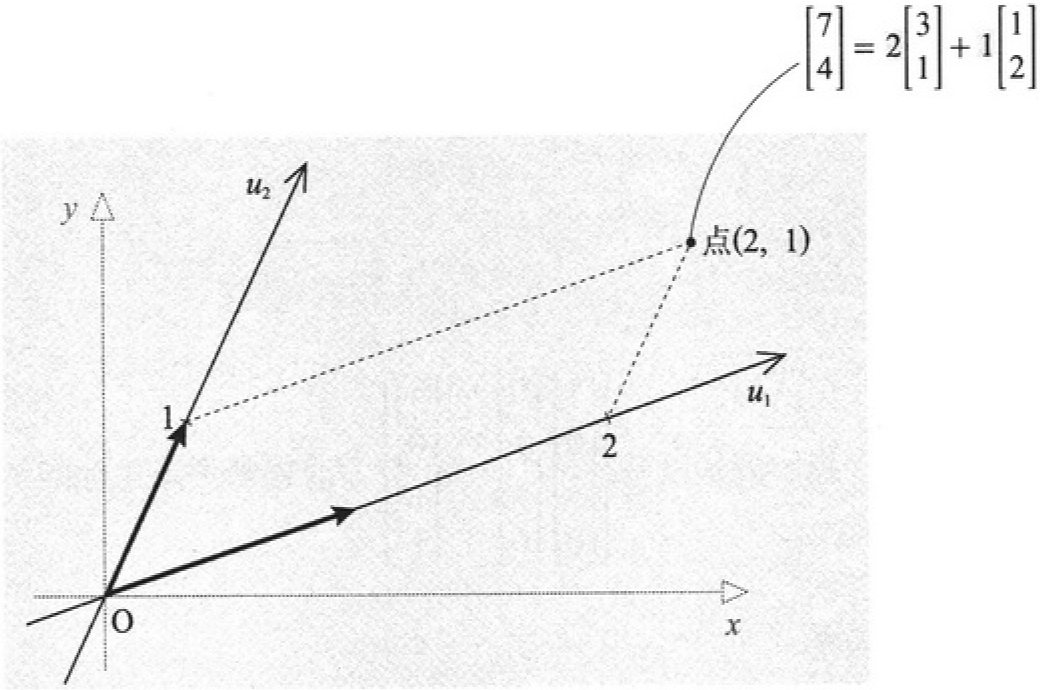
与在第 162 页所叙述的“维数”一样，线性代数中的“坐标”与读者在初中和高中所学的一般坐标不一样。有什么不同呢？我们将以下图为例进行解说。



在初中和高中，我们都是以基$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$为前提来考虑坐标的。因此，我们用下图解释原点和点的关系。



另一方面，在线性代数中，既有以基$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$为前提来考虑坐标的情况，也有不以基$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$为前提来考虑坐标的情况。当不以基$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right\}$为前提来考虑坐标时，就把原点和点的关系解释为如下图。



这种解释利用了因子分析[1]法，非常实用。

1. 本书没有作解释说明。若对此有兴趣，请参考本系列的《漫画统计学之因子分析》一书。

第 7 章

线性映射

1. 线性映射

2. 学习线性映射有何用处

3. 特殊的线性映射

4. 核、像空间、维数公式

5. 秩

6. 线性映射和矩阵的关系





要和南风大学进行练习比赛？
对，我们决定在两周后进行比赛。
比赛啊？我就当观众了。
百合野！
你也要出场比赛！
啊？
我要参加比赛？
主将，让百合野参加比赛，是不是太早了点？
你们不服从我的决定？
不，不是，对不起……


让我们看看你一直以来的练习成果。
怎么样？百合野！
嗯！
我会加油的！
好！今天就到这里，解散！
比赛……
我好紧张啊！
ブルッ
但是，这是主将给我的机会，
我一定要全力以赴！



1. 线性映射
今天我们就进入正题部分，讲解线性映射。
课程结构
基础知识
准备
矩阵
向量
线性映射
特征值和特征向量
我现在就解释一下它的定义。
好，拜托你了！
刚开始上课的时候，我就提到过，
嗯！
线性映射
假设 x_i 和 x_j 为 X 的任意元素，c 为任意实数，f 为“从 X 到 Y 的映射”。
当映射 f 满足以下两个条件时，我们就说“映射 f 是从 X 到 Y 的**线性映射**”。
① $f(x_i)+f(x_j)$ 与 $f(x_i+x_j)$ 相等
② $cf(x_i)$ 与 $f(cx_i)$ 相等。
实际上这个解释还稍微有点模糊……



线性映射

假设$\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}$为 $\boldsymbol{R}^n$ 的任意元素，f 为“从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的映射”。

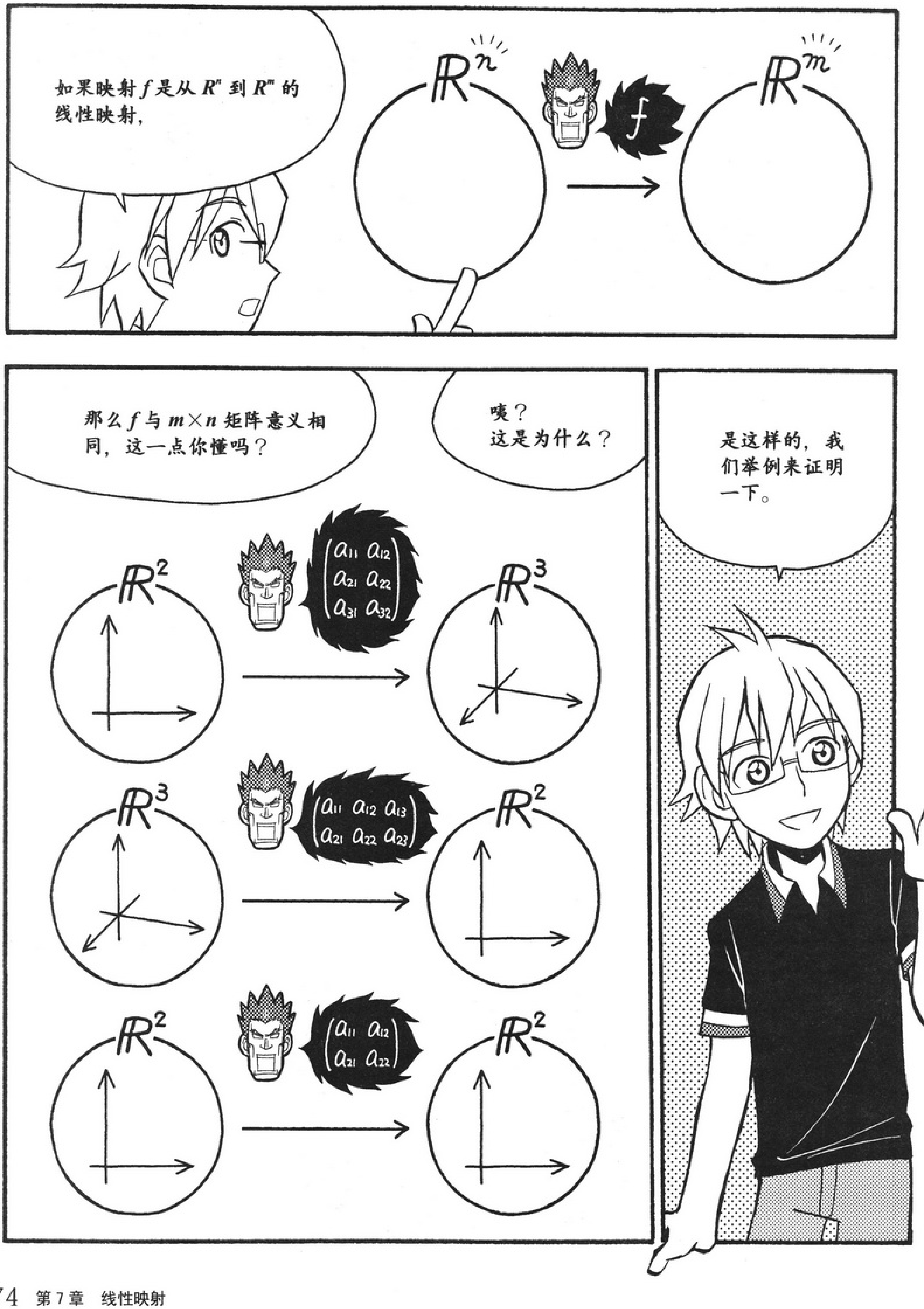
当映射 f 满足以下两个条件时，我们就说“映射 f 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的线性映射”。

① $f\left\{\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}\right\}+f\left\{\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}\right\}$与$f\left\{\begin{bmatrix} x_{1i}+x_{1j} \\ x_{2i}+x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni}+x_{nj} \end{bmatrix}\right\}$相等。

② $cf\left\{\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}\right\}$与$f\left\{c\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}\right\}$相等。

另外，“从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的线性映射”有时可以被叫做**线性变换**或**一次变换**。




如果映射 f 是从 R^n 到 R^m 的线性映射，
$\mathbb{R}^n$
f
$\mathbb{R}^m$
那么 f 与 $m\times n$ 矩阵意义相同，这一点你懂吗？
咦？这是为什么？
是这样的，我们举例来证明一下。
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^3$
$\mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
$\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$

■ 证明“$f\left\{\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}\right\}+f\left\{\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}\right\}$与$f\left\{\begin{bmatrix} x_{1i}+x_{1j} \\ x_{2i}+x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni}+x_{nj} \end{bmatrix}\right\}$相等”

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}x_{1i}+a_{12}x_{2i}+\cdots+a_{1n}x_{ni} \\ a_{21}x_{1i}+a_{22}x_{2i}+\cdots+a_{2n}x_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1i}+a_{m2}x_{2i}+\cdots+a_{mn}x_{ni} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11}x_{1j}+a_{12}x_{2j}+\cdots+a_{1n}x_{nj} \\ a_{21}x_{1j}+a_{22}x_{2j}+\cdots+a_{2n}x_{nj} \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1j}+a_{m2}x_{2j}+\cdots+a_{mn}x_{nj} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}(x_{1i}+x_{1j})+a_{12}(x_{2i}+x_{2j})+\cdots+a_{1n}(x_{ni}+x_{nj}) \\ a_{21}(x_{1i}+x_{1j})+a_{22}(x_{2i}+x_{2j})+\cdots+a_{2n}(x_{ni}+x_{nj}) \\ \vdots \\ a_{m1}(x_{1i}+x_{1j})+a_{m2}(x_{2i}+x_{2j})+\cdots+a_{mn}(x_{ni}+x_{nj}) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1i}+x_{1j} \\ x_{2i}+x_{2j} \\ \vdots \\ x_{ni}+x_{nj} \end{bmatrix}$$



■ 证明“$cf\left\{\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1i} \\ \mathbf{x}_{2i} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{ni} \end{bmatrix}\right\}$与$f\left\{c\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{1j} \\ \mathbf{x}_{2j} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{nj} \end{bmatrix}\right\}$相等”

$$c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= c\begin{bmatrix} a_{11}x_{1i} + a_{12}x_{2i} + \cdots + a_{1n}x_{ni} \\ a_{21}x_{1i} + a_{22}x_{2i} + \cdots + a_{2n}x_{ni} \\ \vdots \\ a_{m1}x_{1i} + a_{m2}x_{2i} + \cdots + a_{mn}x_{ni} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}(cx_{1i}) + a_{12}(cx_{2i}) + \cdots + a_{1n}(cx_{ni}) \\ a_{21}(cx_{1i}) + a_{22}(cx_{2i}) + \cdots + a_{2n}(cx_{ni}) \\ \vdots \\ a_{m1}(cx_{1i}) + a_{m2}(cx_{2i}) + \cdots + a_{mn}(cx_{ni}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} cx_{1i} \\ cx_{2i} \\ \vdots \\ cx_{ni} \end{bmatrix}$$

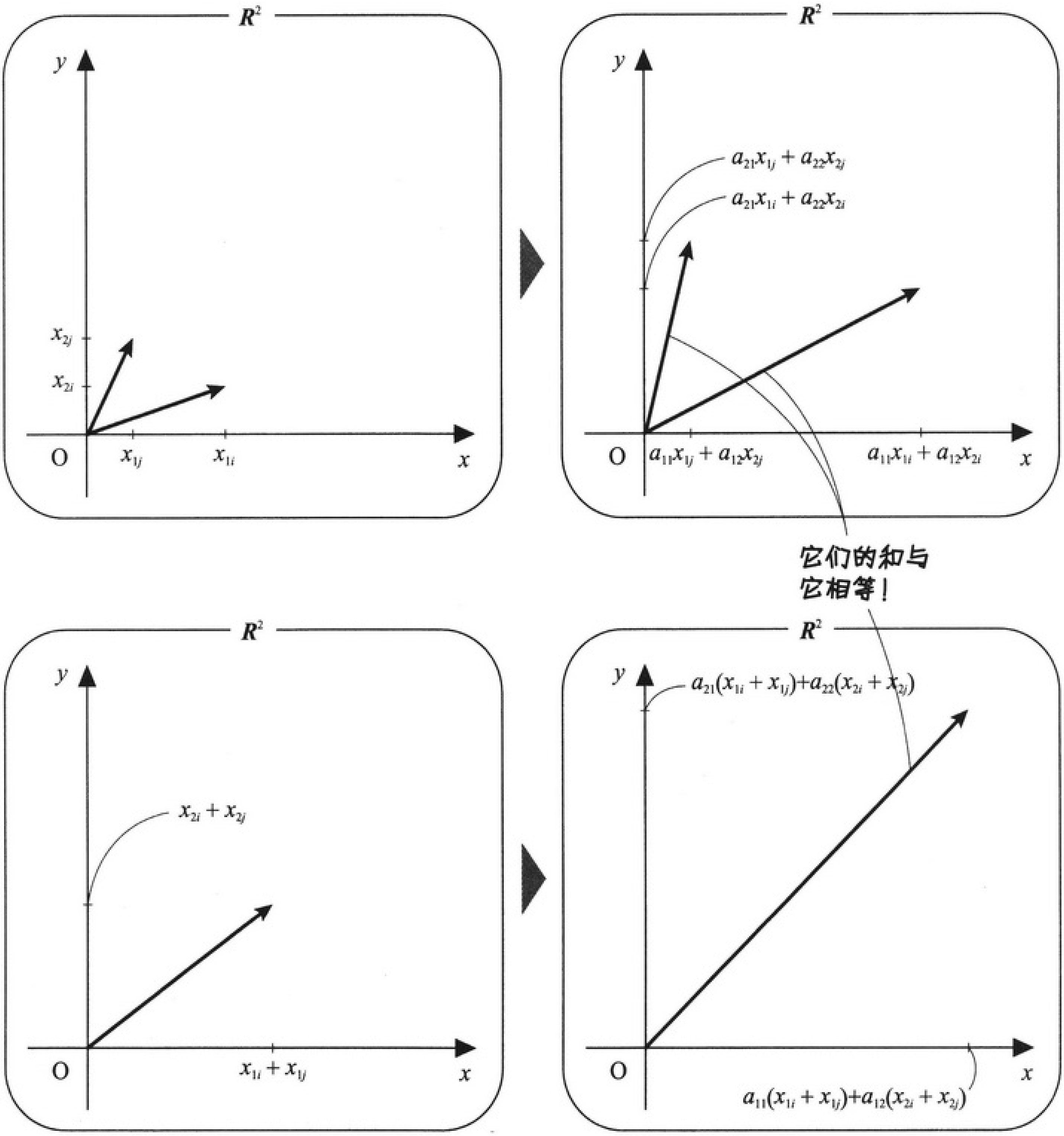
$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\left\{c\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \\ \vdots \\ x_{ni} \end{bmatrix}\right\}$$



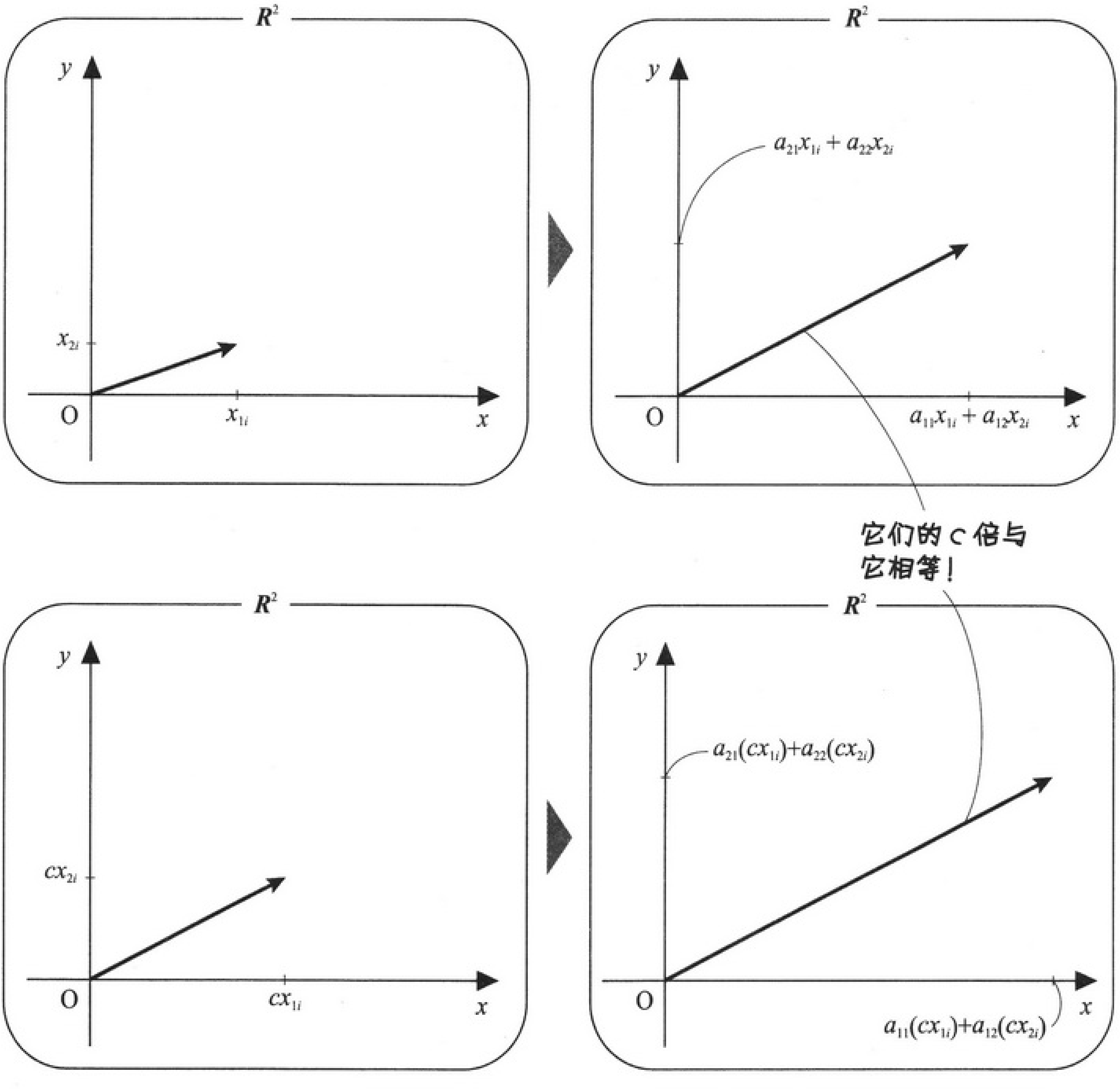
在参考之前，让我们通过图来看看 2×2 矩阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$的情况。



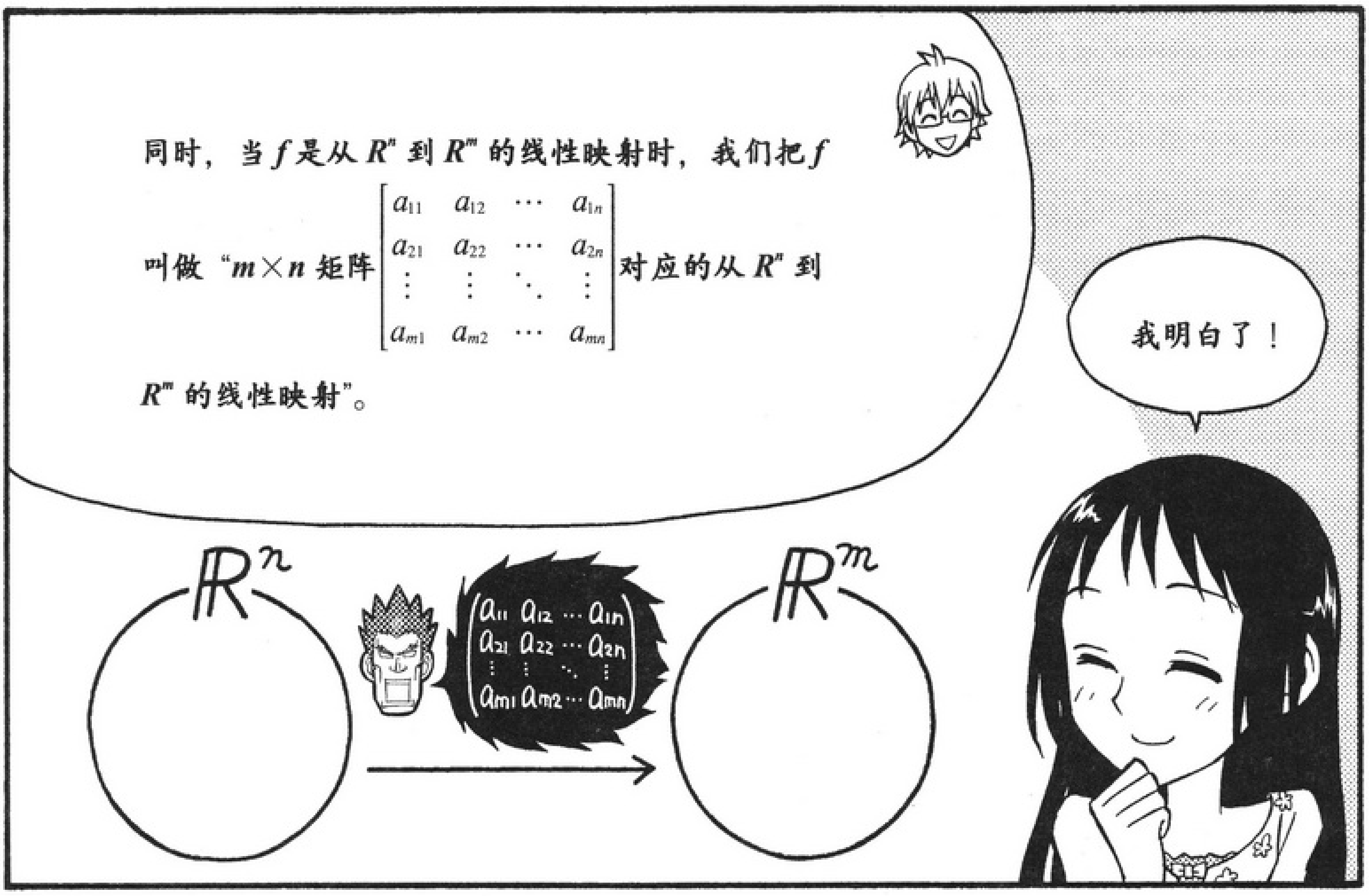
■ 证明“$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1i} \\ x_{2i} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{1i}+x_{1j} \\ x_{2i}+x_{2j} \end{bmatrix}$相等”



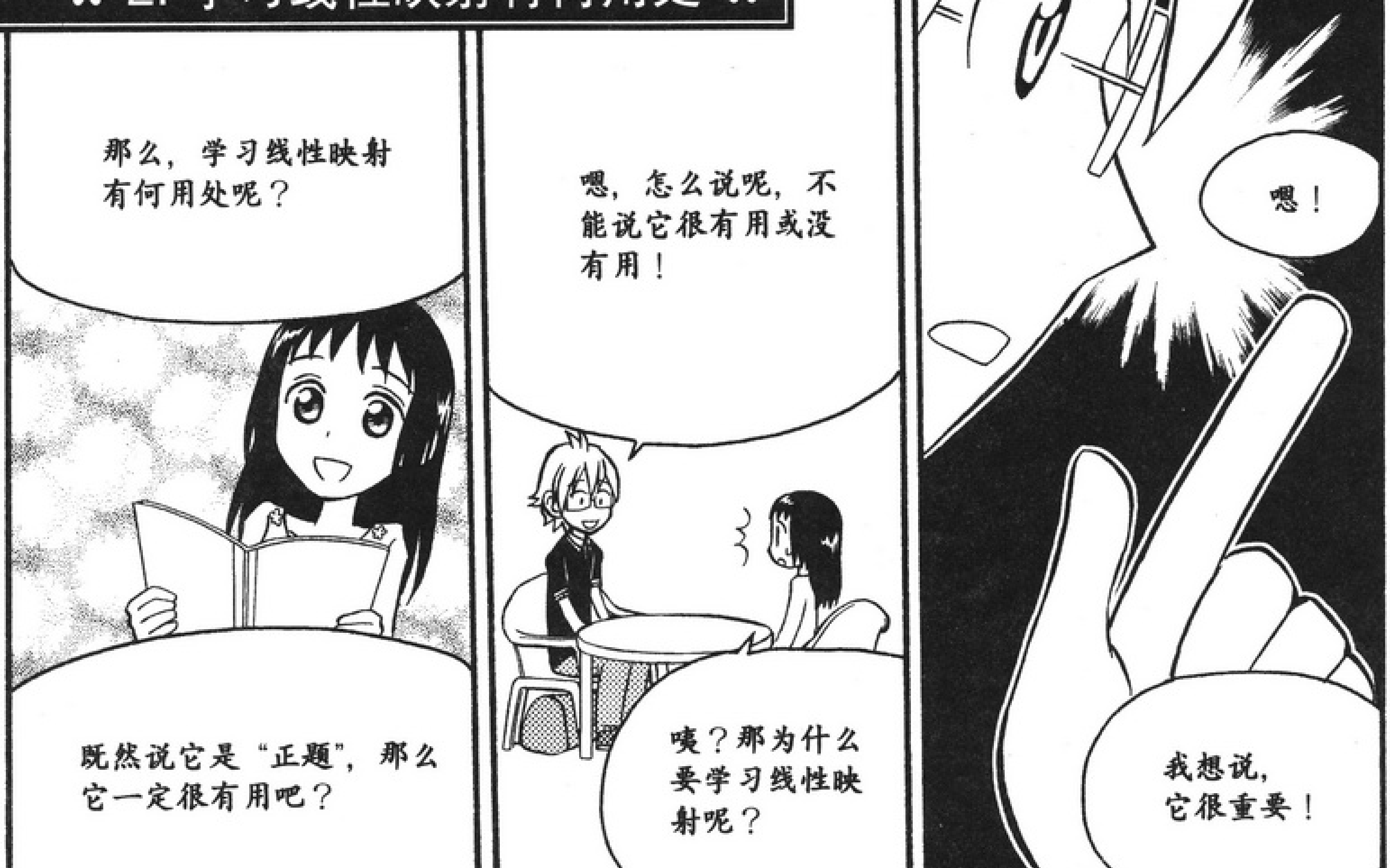
■ 证明"$c\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1i}\\ x_{2i}\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\left\{c\begin{bmatrix}x_{1i}\\ x_{2i}\end{bmatrix}\right\}$相







2. 学习线性映射有何用处

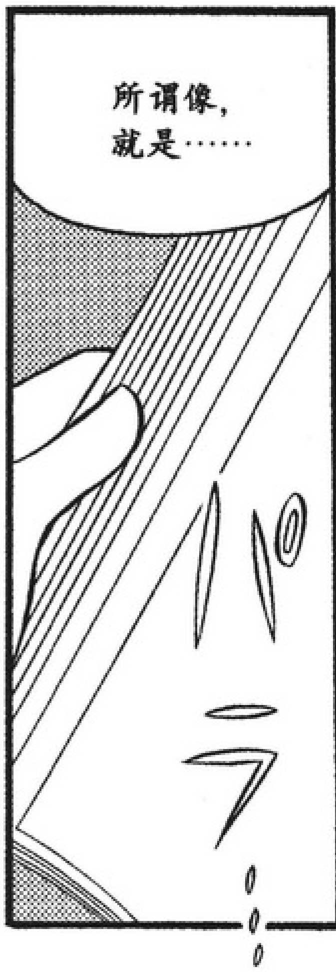




比如，当 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 通过“$m\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 对应的从 R^n 到 R^m 的线性映射”形成的像是 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ 时，这样一种关系就会成立：

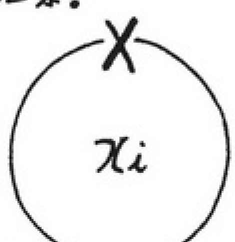
$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

像？



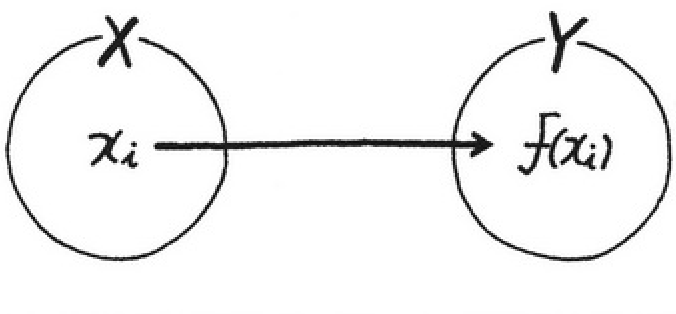
像

假设 x_i 是集合 X 的元素。



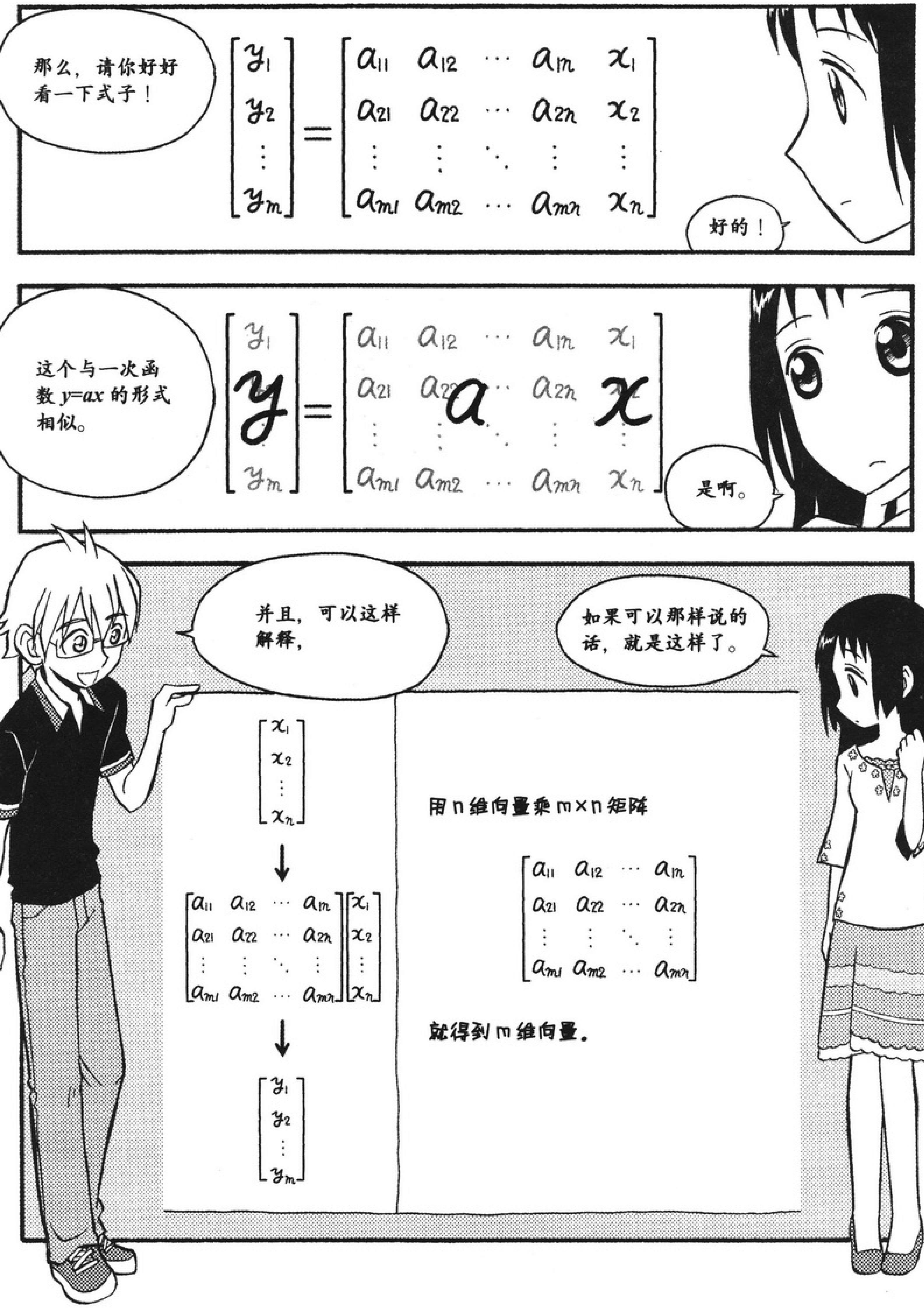
我们以前学过这个。

我们把通过映射 f 与 x_i 对应的集合 Y 的元素叫做 x_i 通过映射 f 形成的像。



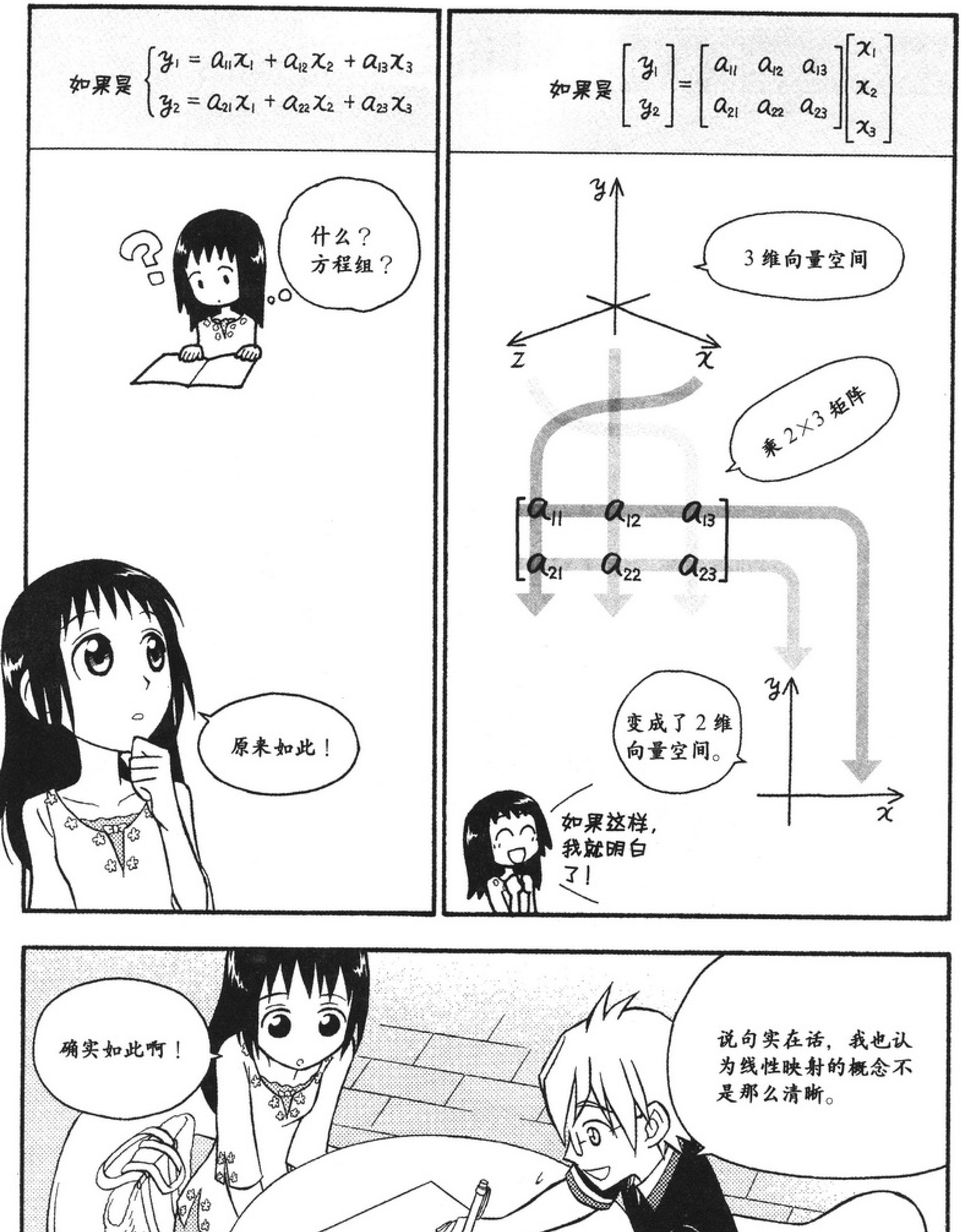
对！

※ 参照第 44~45 页。


那么，请你好好看一下式子！
好的！
这个与一次函数 y=ax 的形式相似。
y = a x
是啊。
并且，可以这样解释，
如果可以那样说的话，就是这样了。
用n维向量乘m×n矩阵
就得到m维向量。



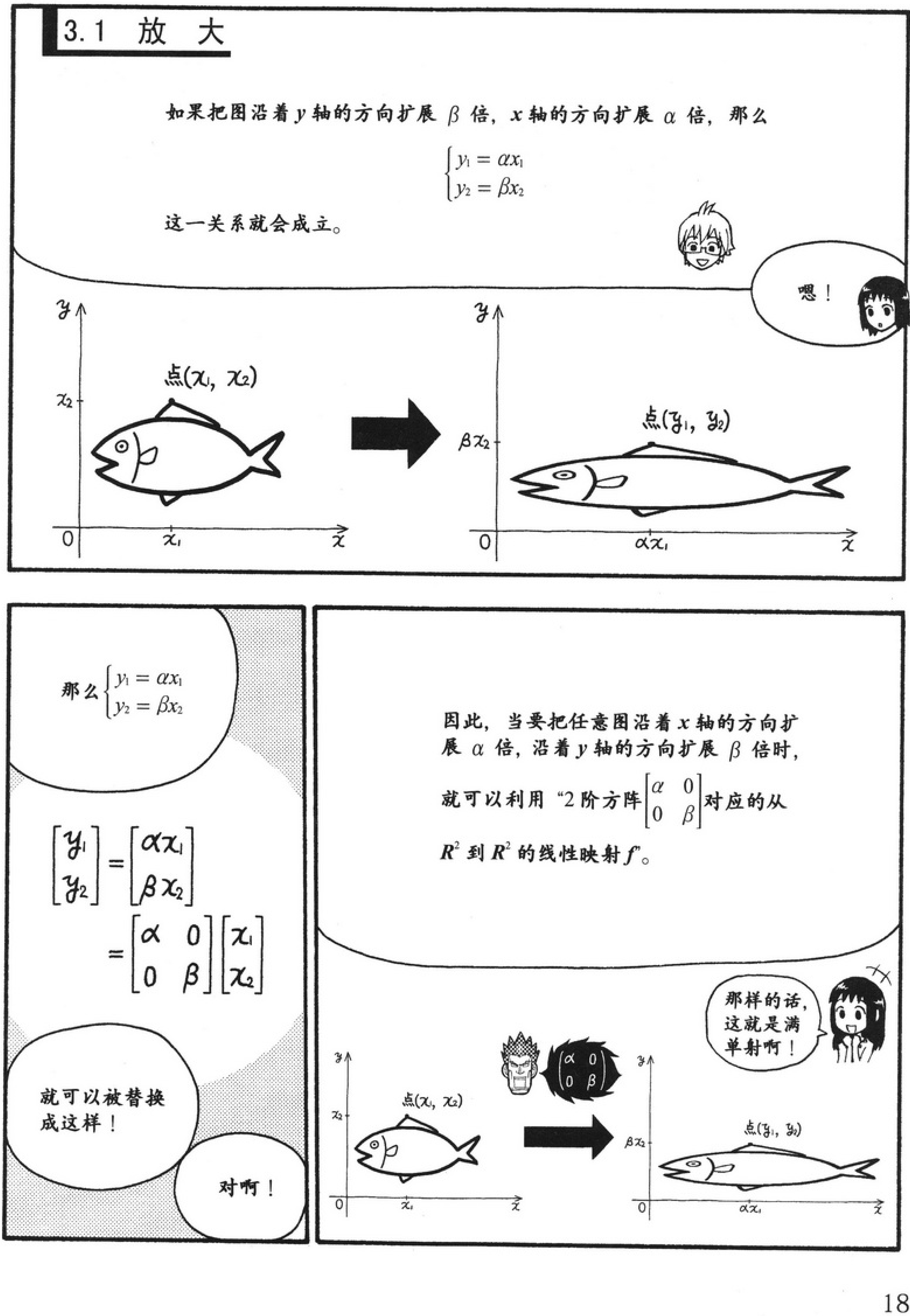
学习线性映射是为了通过视觉效果来更好地理解像的真正意义！
耶！
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$
哦！
是因为这样啊？
虽说如此，但是……
请你考虑一下。比如，我们把“从3维向量到2维向量的线性映射”的式子，
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
用一次方程组的形式来表示，就是这样：
$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$
你是不是想象不出“从3维向量空间变为2维向量空间”的过程？


如果是 $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases}$
什么？方程组？
原来如此！
如果是 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$
y
z
x
3维向量空间
乘2×3矩阵
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$
y
x
变成了2维向量空间。
如果这样，我就明白了！
确实如此啊！
说句实在话，我也认为线性映射的概念不是那么清晰。

3. 特殊的线性映射



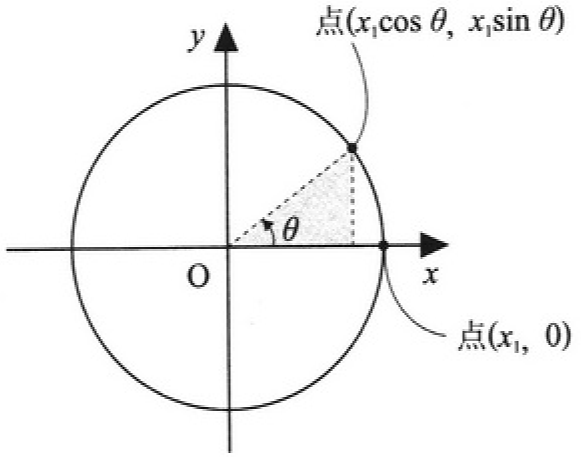
不过，在电脑制图等领域，却经常用到线性映射。
是吗？
现在我介绍一下在电脑制图中用在放大、旋转、平移、透视投影等实际操作中的线性映射。
咔
哇，好可爱哦！
就以我画的画为例吧。
我将图中的任意一点表示为 (x_1, x_2)。
y
点(x_1, x_2)
x_2
0
x_1
x


3.1 放 大
如果把图沿着 y 轴的方向扩展 β 倍，x 轴的方向扩展 α 倍，那么
$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 \\ y_2 = \beta x_2 \end{cases}$
这一关系就会成立。
嗯！
点(x_1, x_2)
点(y_1, y_2)
那么 $\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 \\ y_2 = \beta x_2 \end{cases}$
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \beta x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
就可以被替换成这样！
对啊！
因此，当要把任意图沿着 x 轴的方向扩展 α 倍，沿着 y 轴的方向扩展 β 倍时，
就可以利用“2 阶方阵 $\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$ 对应的从 R^2 到 R^2 的线性映射 f”。
那样的话，这就是满单射啊！
点(x_1, x_2)
点(y_1, y_2)

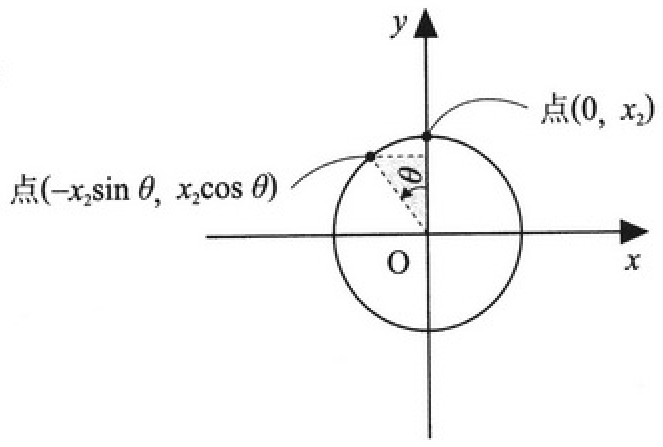
3.2 旋转



- 如果把$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$旋转 θ，就会变成$\begin{cases} x_1\cos\theta \\ x_1\sin\theta \end{cases}$。

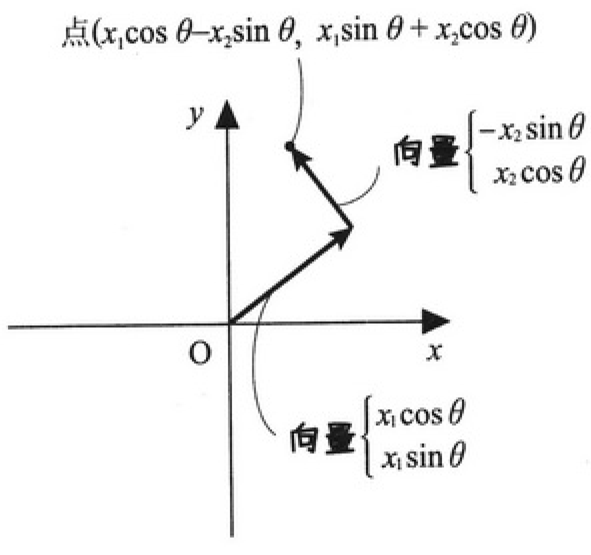


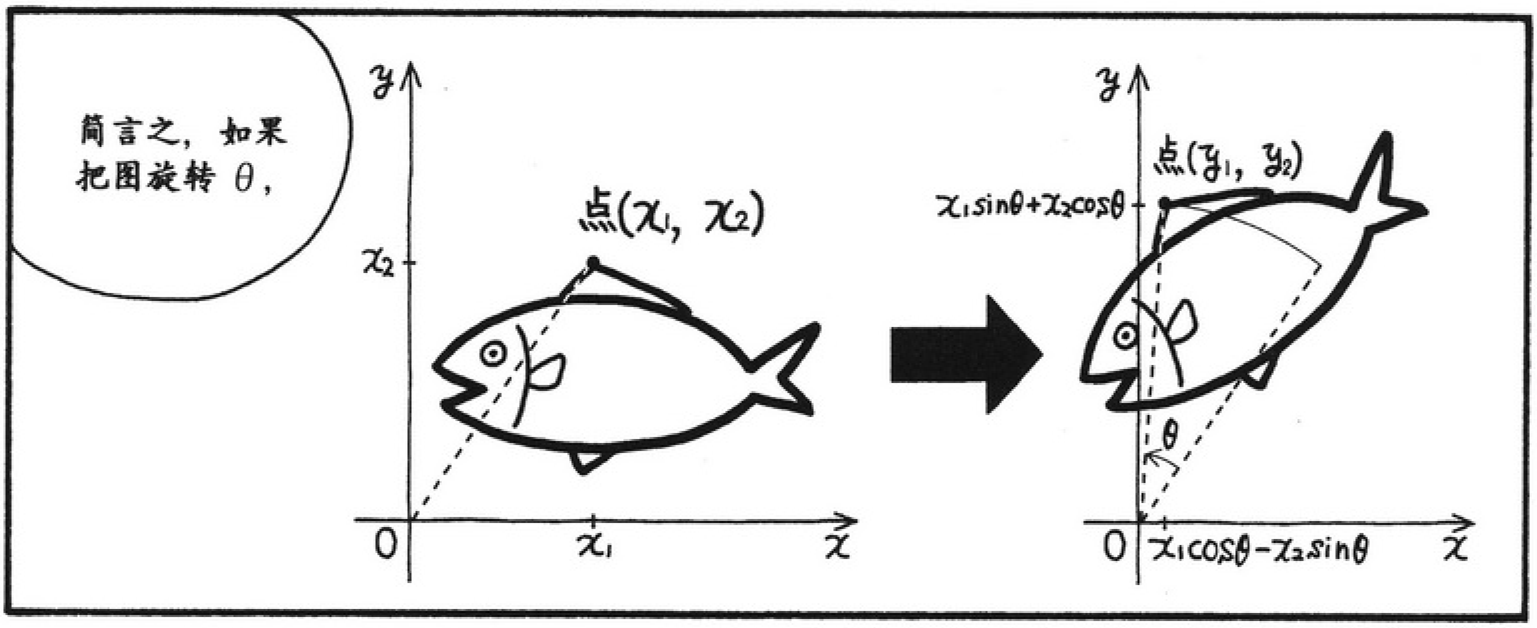
- 如果把$\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$旋转 θ，就会变成$\begin{cases} -x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta \end{cases}$。



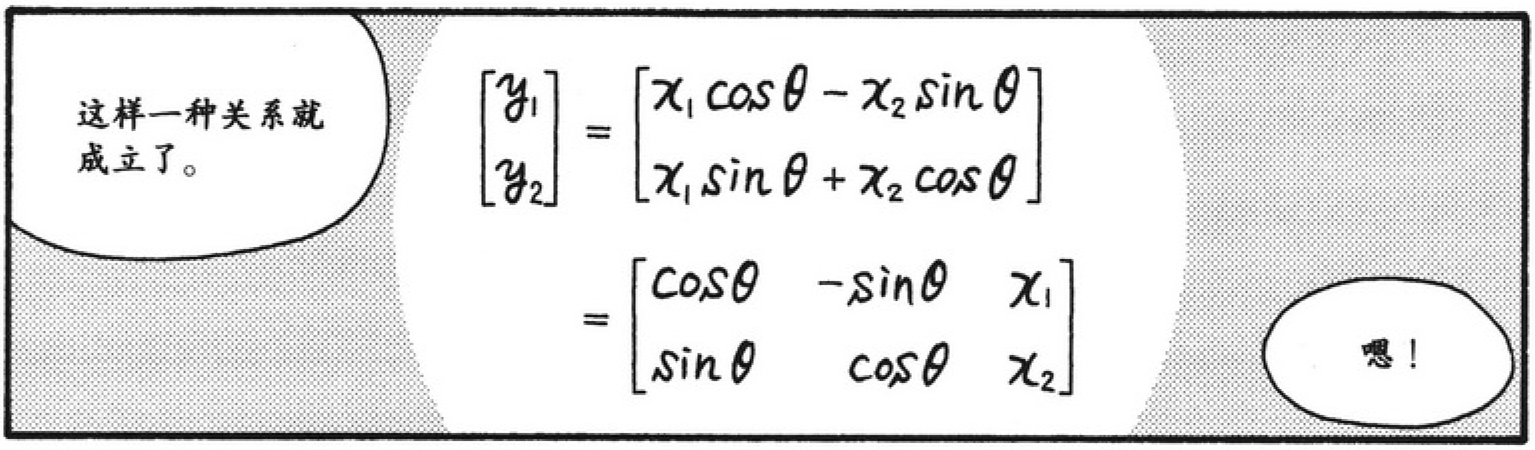
- 如果把$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，即把$\begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$旋转 θ，就会变成

$$\begin{bmatrix} x_1\cos\theta \\ x_1\sin\theta \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -x_2\sin\theta \\ x_2\cos\theta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1\cos\theta-x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta+x_2\cos\theta \end{bmatrix}$$

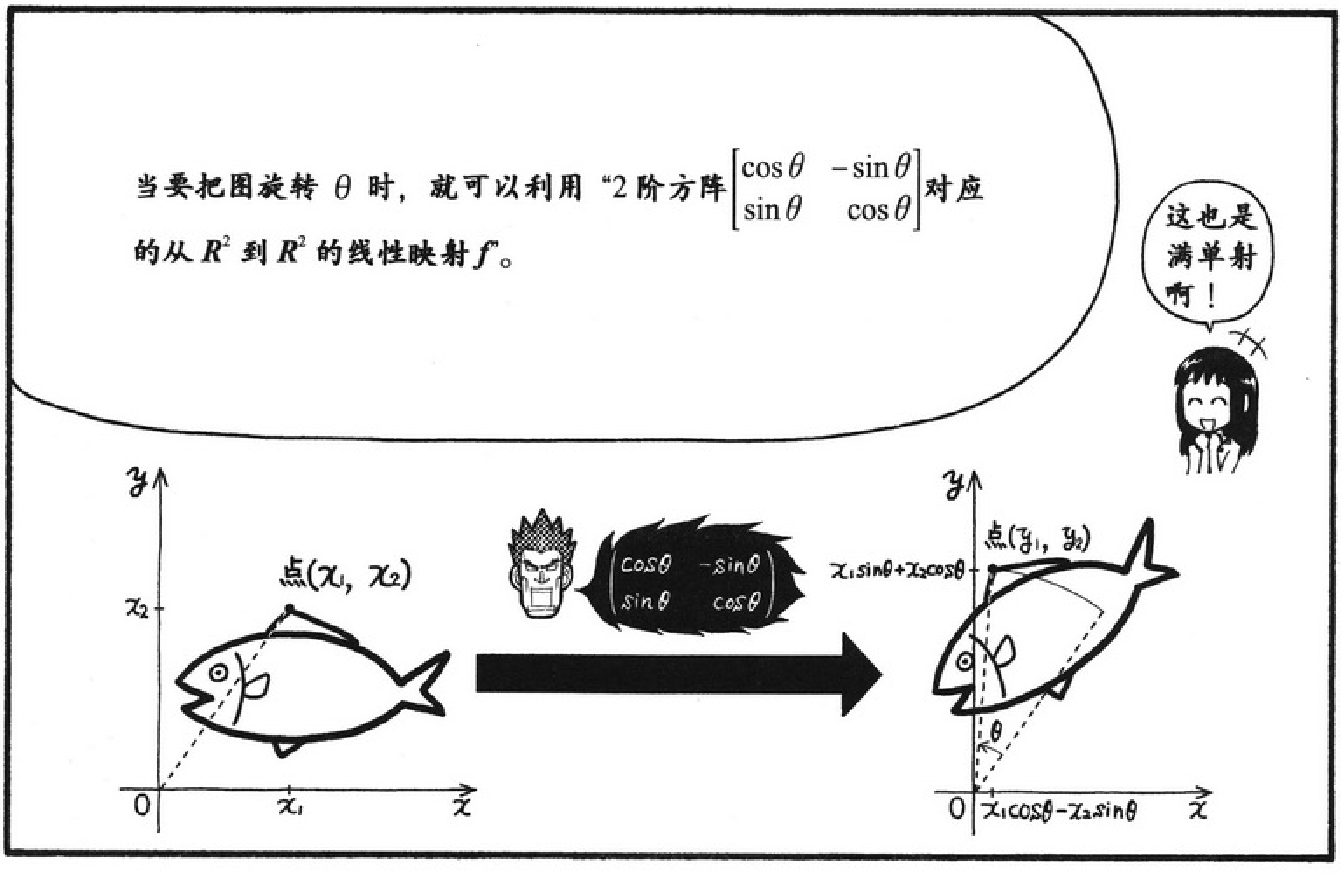




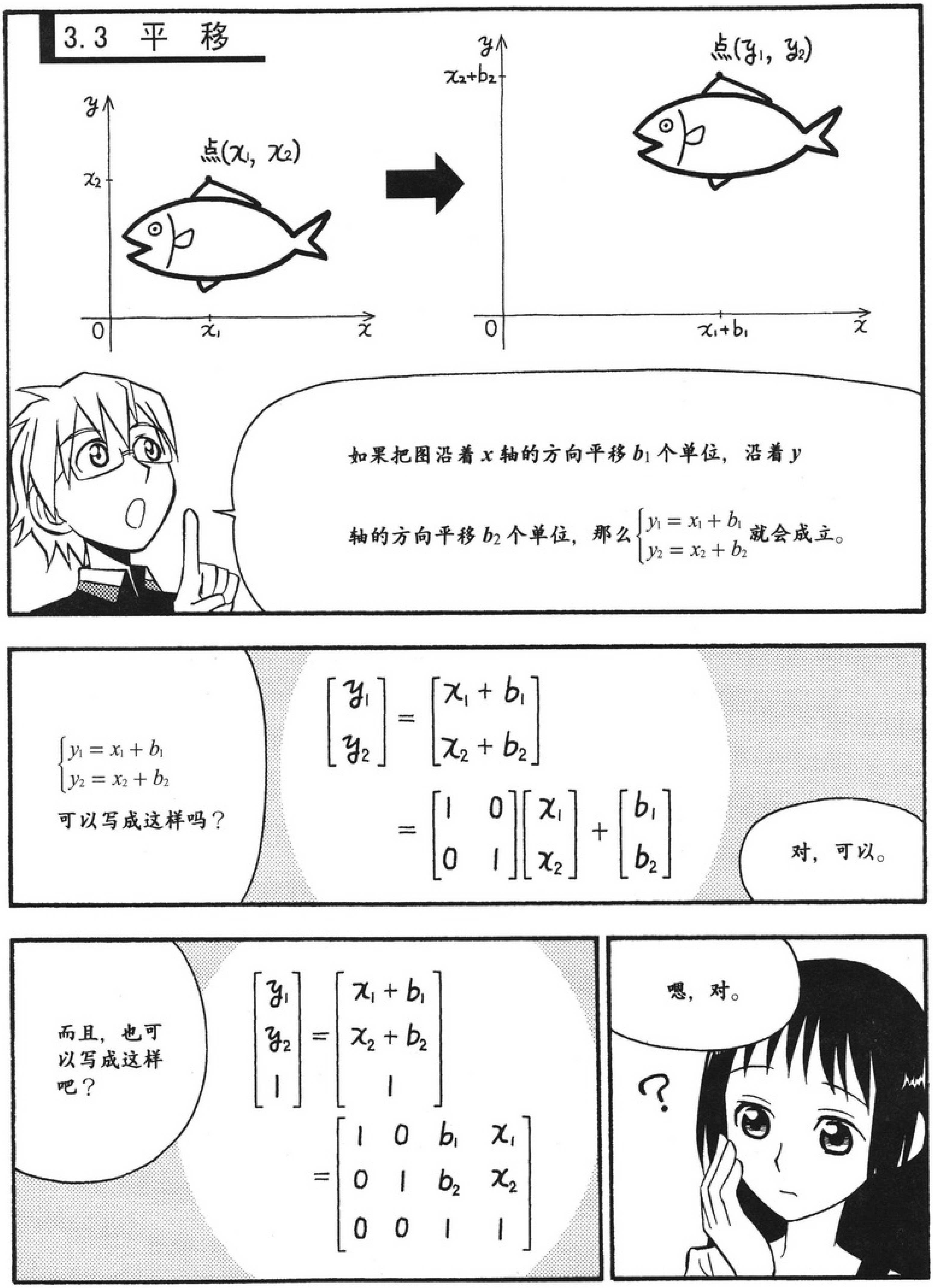
简言之，如果把图旋转 θ，
点(x1, x2)
x2
x1
0
y
x
点(y1, y2)
x1sinθ+x2cosθ
x1cosθ−x2sinθ
θ



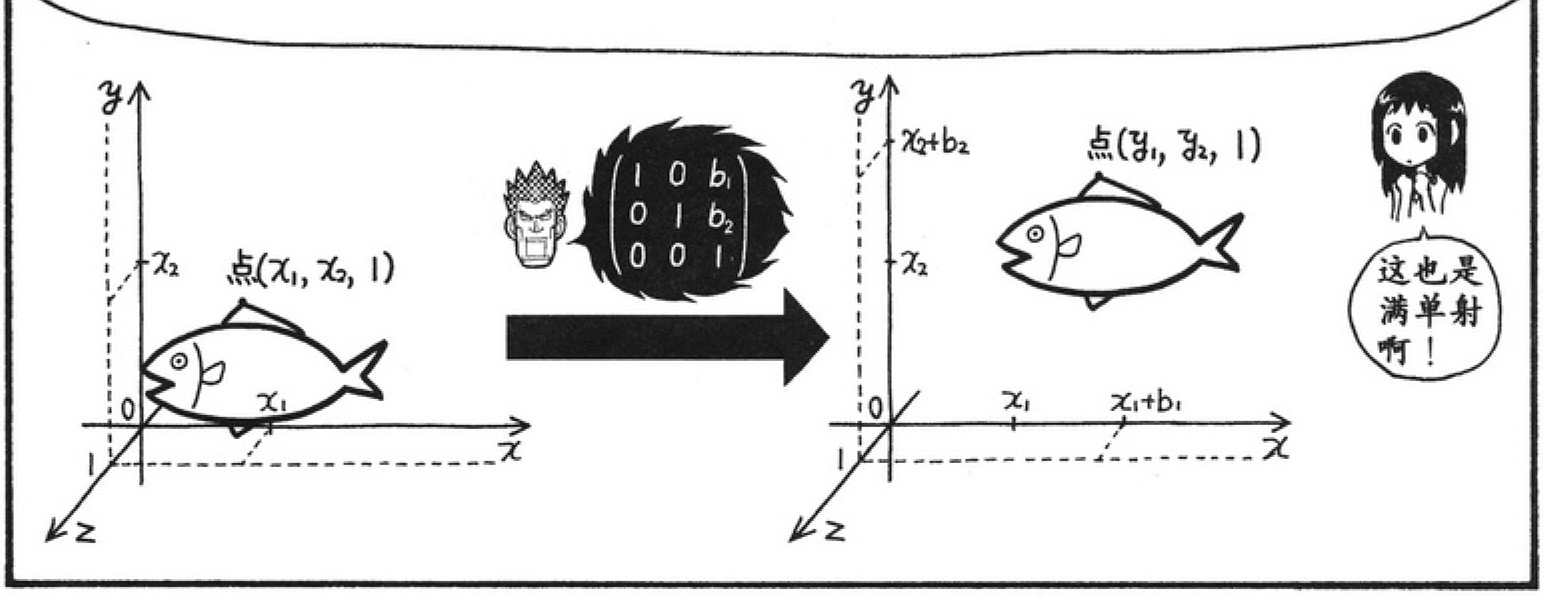
这样一种关系就成立了。
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1 \\ \sin\theta & \cos\theta & x_2 \end{bmatrix}$
嗯！

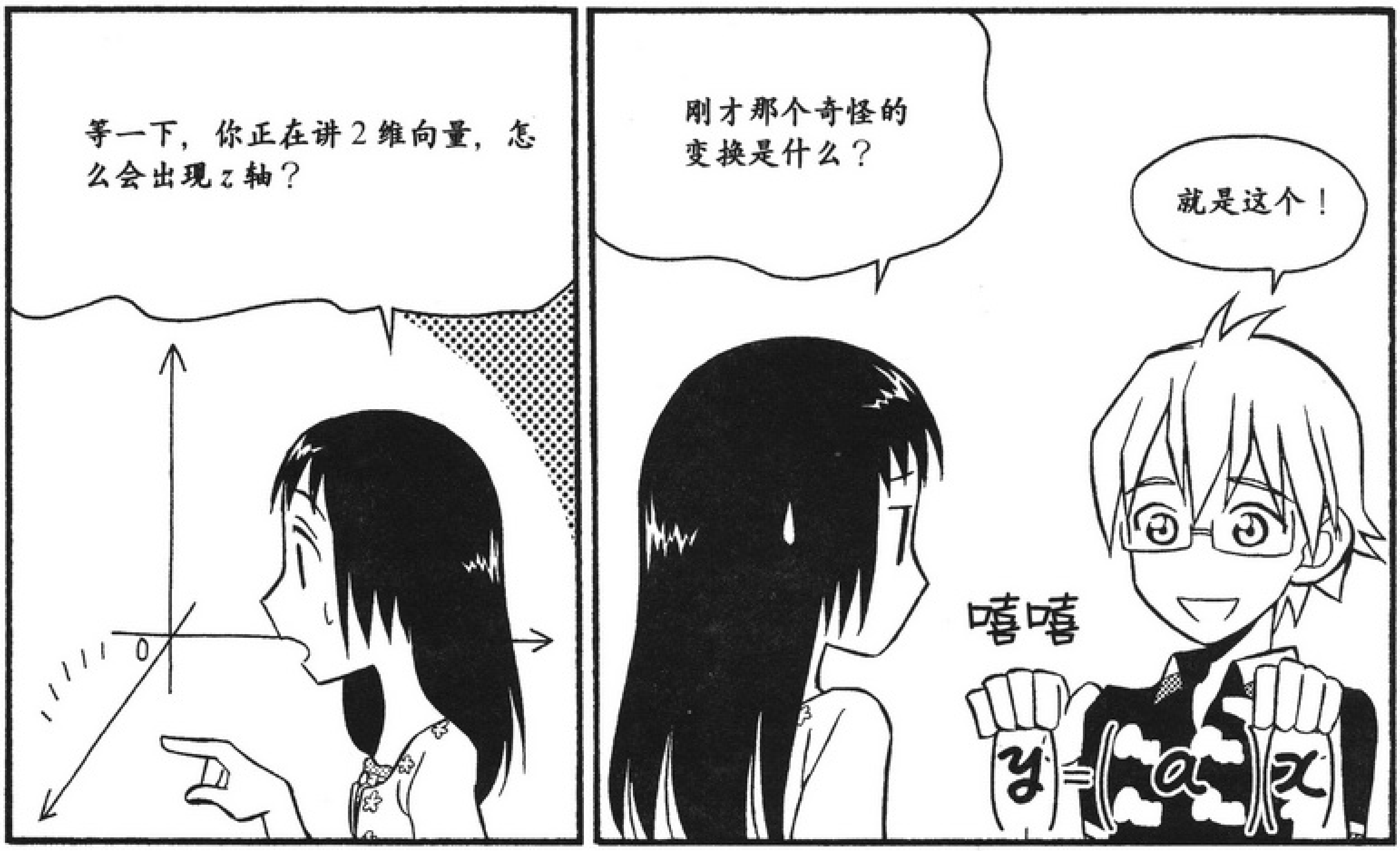


当要把图旋转 θ 时，就可以利用“2 阶方阵 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 对应的从 R^2 到 R^2 的线性映射 f”。
这也是满单射啊！
$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
点(x1, x2)
点(y1, y2)
x1sinθ+x2cosθ
x1cosθ−x2sinθ


3.3 平移
y
点(x_1, x_2)
x_2
0
x_1
x
y
点(y_1, y_2)
x_2+b_2
0
x_1+b_1
x
如果把图沿着 x 轴的方向平移 b_1 个单位，沿着 y 轴的方向平移 b_2 个单位，那么$\begin{cases} y_1 = x_1 + b_1 \\ y_2 = x_2 + b_2 \end{cases}$就会成立。
$\begin{cases} y_1 = x_1 + b_1 \\ y_2 = x_2 + b_2 \end{cases}$ 可以写成这样吗？
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
对，可以。
而且，也可以写成这样吧？
$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + b_1 \\ x_2 + b_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 & x_1 \\ 0 & 1 & b_2 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
嗯，对。
?

因此，当要把图沿着 x 轴的方向平移 b_1 个单位，沿着 y 轴的方向平移 b_2 个单位时，就可以利用"3 阶方阵 $\begin{bmatrix}1 & 0 & b_1\\0 & 1 & b_2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 对应的从 R^3 到 R^3 的线性映射 f"。





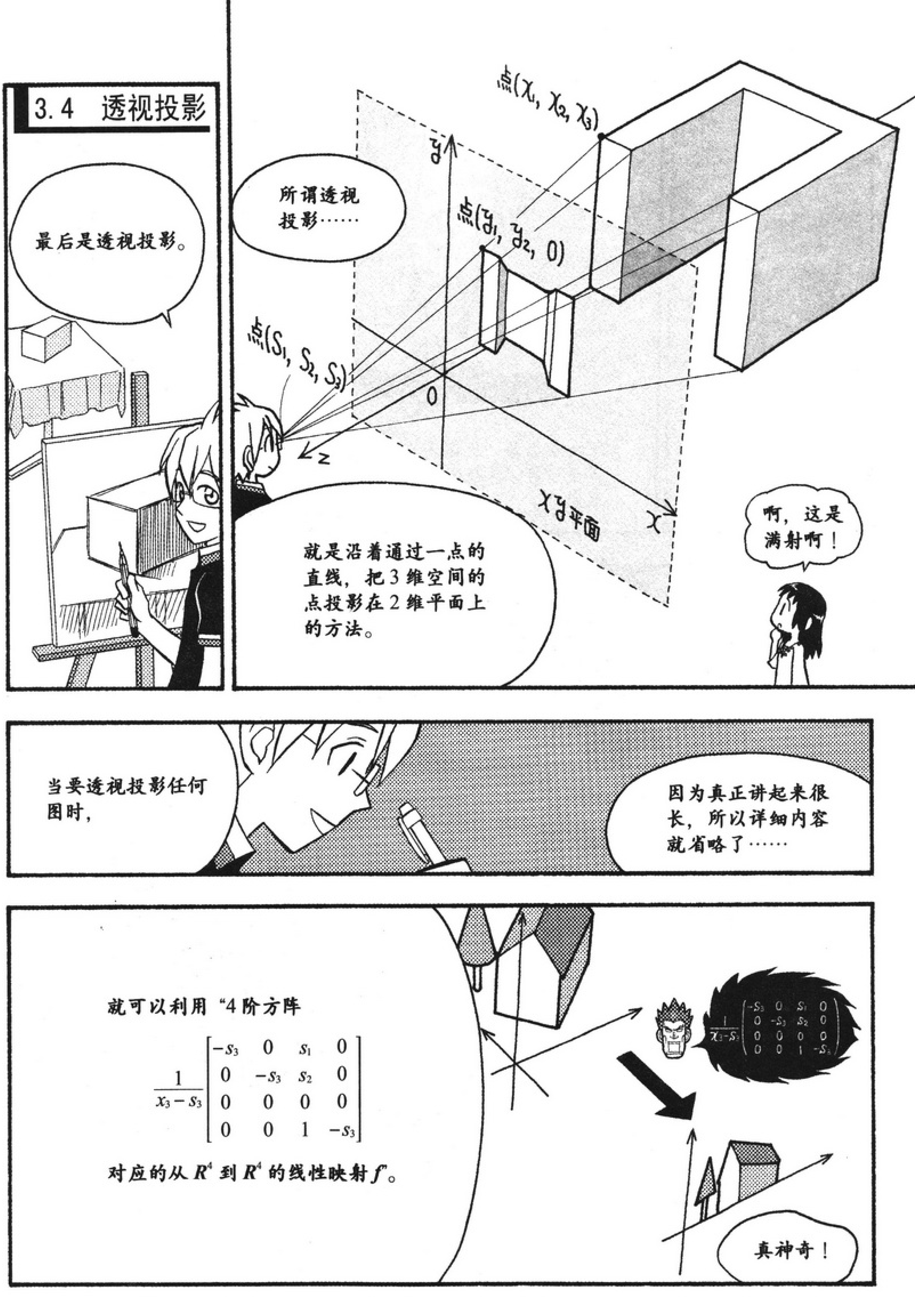






	一般想到的线性映射	在电脑制图等实际操作中用到的线性映射
放大	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$
旋转	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$
平移	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ ※ 这个不是线性映射	$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}$

3.4 透视投影


最后是透视投影。
所谓透视投影……
点(x_1, x_2, x_3)
点$(y_1, y_2, 0)$
点(s_1, s_2, s_3)
y
0
z
x
xy平面
就是沿着通过一点的直线，把3维空间的点投影在2维平面上的方法。
啊，这是满射啊！
当要透视投影任何图时，
因为真正讲起来很长，所以详细内容就省略了……
就可以利用“4阶方阵
$$\frac{1}{x_3 - s_3}\begin{bmatrix} -s_3 & 0 & s_1 & 0 \\ 0 & -s_3 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -s_3 \end{bmatrix}$$
对应的从R^4到R^4的线性映射f”。
真神奇！


就是这样一种感觉。
已经讲了很多了，
今天的课就上到这儿吧！
下次是最后一次课了，我会讲解“特征值和特征向量”。
就要到最后一次课了啊？
还有一点内容，你要好好努力哦！
那当然，承蒙百合野这样帮助我！
嘻嘻
百合野，你也要加油哦！
咦？
比赛的事……
你知道了？
哥哥和我说了。
虽然心里没底，但今后我会拼命练习的！


我会为你助阵的！
你要好好努力哦，百合野！
你没问题的！
さっ
啊，谢，谢谢你！
我会加油的！

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

可以被写成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

请根据这一例子来学习本节内容。另外，本节的映射 f 都是由“$m \times n$ 矩阵

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 对应的从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的线性映射”。

被映射到零元素的全体元素的集合，即集合$\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right\}$称为“映射 f 的**核**”。一般表示为 Ker f。

为了与“映射 f 的核”这一名称相呼应，有时就把“映射 f 的值域”即

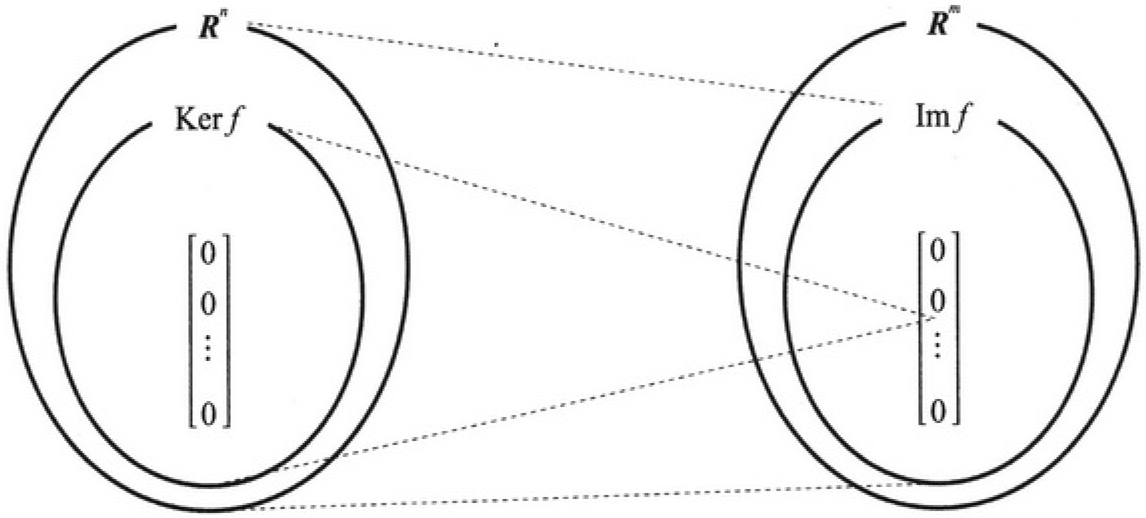
$$\text{集合}\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right\}$$

称为“映射 f 的**像空间**”。一般表示为 Im f。

Ker f 是 $\boldsymbol{R}^n$ 的子空间，Im f 是 $\boldsymbol{R}^m$ 的子空间。在 dim Ker f 与 dim Im f 之间，存在着这样一种关系，即

$$n-\dim \operatorname{Ker} f=\dim \operatorname{Im} f$$

这种关系被称为“**维数公式**”。



例 1

假设映射 f 是“2 阶方阵$\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$对应的从 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性映射”，那么就有

$$\begin{cases}\mathrm{Ker}\,f=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}\\ \mathrm{Im}\,f=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}=\boldsymbol{R}^2\end{cases}$$

同时也有$\begin{cases}n & =2\\ \dim\mathrm{Ker}\,f=0\\ \dim\mathrm{Im}\,f & =2\end{cases}$。

例 2

假设映射 f 是“2 阶方阵$\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}$对应的从 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性映射”，那么就有

$$\begin{cases}\mathrm{Ker}\,f=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=[x_1+2x_2]\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\}\\ \qquad\qquad=\left\{c\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\middle|\ c\text{ 为任意实数}\right\}\\ \mathrm{Im}\,f=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=[x_1+2x_2]\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\}\\ \qquad\qquad=\left\{c\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\middle|\ c\text{ 为任意实数}\right\}\end{cases}$$

同时也有$\begin{cases}n & =2\\ \dim\mathrm{Ker}\,f=1\\ \dim\mathrm{Im}\,f & =1\end{cases}$。

例 3

假设映射 f 是“3×2 矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$对应的从 $\boldsymbol{R}^2$ 到 $\boldsymbol{R}^3$ 的线性映射”，那么就有

$$\begin{cases}\operatorname{Ker} f=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}\\ \operatorname{Im} f=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}\\ \qquad=\left\{c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\middle| c_1、c_2 \text{ 为任意实数}\right\}\end{cases}$$

同时也有$\begin{cases}n & =2\\ \dim\operatorname{Ker} f=0\\ \dim\operatorname{Im} f & =2\end{cases}$。

例 4

假设映射 f 是“2×4 矩阵 $\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}$ 对应的从 $\boldsymbol{R}^4$ 到 $\boldsymbol{R}^2$ 的线性映射”，那么就有

$$\begin{cases}
\operatorname{Ker}f=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right\}\\
\quad=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}\\
\quad=\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\middle|x_1+3x_3+x_4=0,x_2+x_3+2x_4=0\right\}\\
\quad=\left\{c_1\begin{bmatrix}-3\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\1\end{bmatrix}\middle|\ c_1\text{、}c_2\text{ 为任意实数}\right\}\\
\operatorname{Im}f=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}\right\}\\
\quad=\left\{\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}\middle|\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}=\boldsymbol{R}^2
\end{cases}$$

同时也有 $\begin{cases}n=4\\\dim\operatorname{Ker}f=2\\\dim\operatorname{Im}f=2\end{cases}$。

✻ 5. 秩 ✻

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

可以被写成

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \left[x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right] \\
&= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

请根据这个来学习本节的内容。另外，本节的映射 f 都是“$m\times n$ 矩阵

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 对应的从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的线性映射”。

5.1 秩

我们把在向量$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$…向量$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$中线性无关的向量的个数，即 $\boldsymbol{R}^m$ 的子空间

$\mathrm{Im}\,f$的维数称为“$m \times n$ 矩阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$的**秩**”。秩又被称为**阶数**。

$m \times n$ 矩阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$的秩一般表示为 $\mathrm{rank}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$。

例 1

一次方程组$\begin{cases} 3x_1 + 1x_2 = y_1 \\ 1x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases}$，即$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$可以写成

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 1x_2 \\ 1x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

从第 139 页和第 141 页中我们可以得知向量$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$线性无关，所以就可以得到

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2$$

同时也可以得到$\det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3 \times 2 - 1 \times 1 = 5 \neq 0$。

例 2

一次方程组$\begin{cases}3x_1+6x_2=y_1\\1x_1+2x_2=y_2\end{cases}$，即$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1+6x_2\\1x_1+2x_2\end{bmatrix}$，可以写成

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x_1+6x_2\\1x_1+2x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[x_1+2x_2]\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}。$$

因此，就可以得到

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}3&6\\1&2\end{bmatrix}=1，$$

同时也可以得到

$$\det\begin{bmatrix}3&6\\1&2\end{bmatrix}=3\times2-6\times1=0。$$

例 3

一次方程组$\begin{cases}1x_1+0x_2=y_1\\0x_1+1x_2=y_2\\0x_1+0x_2=y_3\end{cases}$，即$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x_1+0x_2\\0x_1+1x_2\\0x_1+0x_2\end{bmatrix}$，可以写成

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x_1+0x_2\\0x_1+1x_2\\0x_1+0x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}。$$

从第 143 页中，我们可以得知向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$线性无关，所以就可以得到

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}=2。$$

同时，这个一次方程组也可以写成

$$\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x_1+0x_2\\0x_1+1x_2\\0x_1+0x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

就像我们在第 105 页中想象到的一样，可以得到$\det\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=0$。

例 4

一次方程组$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 = y_1 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 = y_2 \end{cases}$，即$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 \end{bmatrix}$，可以写成

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}。$$

如第 211 页所述，可以得到

$$\text{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2。$$

同时，这个一次方程组也可以写成

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 1x_4 \\ 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 2x_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}。$$

就像我们在第 105 页中想象到的一样，可以得到$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$。

从这 4 个例子中我们可以得知：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0 \iff \text{rank}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \neq n$$

5.2 秩的求法

秩既可以通过观察对象矩阵凭感觉来判断，又可以通过精确计算来求得。

前一种方法看起来似乎比较可笑，不过在矩阵的行数和列数比较少时也不失为一种可行的方法。比如，3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\\2 & 5 & 8\\3 & 6 & 12\end{bmatrix}$的秩是 2，3×2 矩阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\\0 & 5\end{bmatrix}$的秩是 2，即使不去认真观察，看一眼矩阵也能够马上判断出来。

虽说如此，采用前一种方法的情况毕竟还是有限制的。至少就过不了考试这一关。因此，我们来介绍下一种方法。

我将通过具体例子，采用“❓问题→思路→❗解答”这一流程来讲解。

❓问题

请求出以下所示的 2×4 矩阵的秩。

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\0 & 1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

思路

关于 $m\times n$ 矩阵$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$，存在以下 4 种情况。

情况 1

左乘可逆矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

第 i 行　第 j 行　第 i 列　第 j 列

第 i 行和第 j 行就会变换位置。右乘可逆矩阵，第 i 列和第 j 列就会变换位置。

■ **例 1（第 1 行和第 4 行变换位置）**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+1\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+1\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+1\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+1\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+1\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+0\times a_{21}+1\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+1\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+1\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 1\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 1\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{31}+0\times a_{43} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

■ 例 2（第 1 列和第 3 列变换位置）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\times 0+a_{12}\times 0+a_{13}\times 1 & a_{11}\times 0+a_{12}\times 1+a_{13}\times 0 & a_{11}\times 1+a_{12}\times 0+a_{13}\times 0 \\ a_{21}\times 0+a_{22}\times 0+a_{23}\times 1 & a_{21}\times 0+a_{22}\times 1+a_{23}\times 0 & a_{21}\times 1+a_{22}\times 0+a_{23}\times 0 \\ a_{31}\times 0+a_{32}\times 0+a_{33}\times 1 & a_{31}\times 0+a_{32}\times 1+a_{33}\times 0 & a_{31}\times 1+a_{32}\times 0+a_{33}\times 0 \\ a_{41}\times 0+a_{42}\times 0+a_{43}\times 1 & a_{41}\times 0+a_{42}\times 1+a_{43}\times 0 & a_{41}\times 1+a_{42}\times 0+a_{43}\times 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix}$$

情况 2

左乘可逆矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & k & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$（第 i 行；第 i 列），第 i 行就变为原来的 k 倍。右乘可逆矩阵，第 i 列就变成原来的 k 倍。

■ 例 1（第 3 行变为原来的 k 倍）

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 1\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+1\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+1\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+0\times a_{21}+k\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+k\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+k\times a_{33}+0\times a_{43} \\ 0\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+1\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+1\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{31}+1\times a_{43} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

■ 例 2（第 2 列变为原来的 k 倍）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\times 1+a_{12}\times 0+a_{13}\times 0 & a_{11}\times 0+a_{12}\times k+a_{13}\times 0 & a_{11}\times 0+a_{12}\times 0+a_{13}\times 1 \\ a_{21}\times 1+a_{22}\times 0+a_{23}\times 0 & a_{21}\times 0+a_{22}\times k+a_{23}\times 0 & a_{21}\times 0+a_{22}\times 0+a_{23}\times 1 \\ a_{31}\times 1+a_{32}\times 0+a_{33}\times 0 & a_{31}\times 0+a_{32}\times k+a_{33}\times 0 & a_{31}\times 0+a_{32}\times 0+a_{33}\times 1 \\ a_{41}\times 1+a_{42}\times 0+a_{43}\times 0 & a_{41}\times 0+a_{42}\times k+a_{43}\times 0 & a_{41}\times 0+a_{42}\times 0+a_{43}\times 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{22} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \\ a_{41} & ka_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

情况 3

左乘可逆矩阵

$$
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & k & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
$$

第 i 行　第 j 行　第 i 列　第 j 列

第 j 行就会加上第 i 行的 k 倍。右乘可逆矩阵，第 i 列就会加上第 j 列的 k 倍。

■ **例 1（第 4 行加上第 2 行的 k 倍）**

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & k & 0 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
1\times a_{11}+0\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 1\times a_{12}+0\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 1\times a_{13}+0\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\
0\times a_{11}+1\times a_{21}+0\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+1\times a_{22}+0\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+1\times a_{23}+0\times a_{33}+0\times a_{43} \\
0\times a_{11}+0\times a_{21}+1\times a_{31}+0\times a_{41} & 0\times a_{12}+0\times a_{22}+1\times a_{32}+0\times a_{42} & 0\times a_{13}+0\times a_{23}+1\times a_{33}+0\times a_{43} \\
0\times a_{11}+k\times a_{21}+0\times a_{31}+1\times a_{41} & 0\times a_{12}+k\times a_{22}+0\times a_{32}+1\times a_{42} & 0\times a_{13}+k\times a_{23}+0\times a_{31}+1\times a_{43}
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
a_{41}+ka_{21} & a_{42}+ka_{22} & a_{43}+ka_{23}
\end{bmatrix}
$$

■ 例 2（第 1 列加上第 3 列的 k 倍）

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11}\times 1 + a_{12}\times 0 + a_{13}\times k & a_{11}\times 0 + a_{12}\times 1 + a_{13}\times 0 & a_{11}\times 0 + a_{12}\times 0 + a_{13}\times 1 \\ a_{21}\times 1 + a_{22}\times 0 + a_{23}\times k & a_{21}\times 0 + a_{22}\times 1 + a_{23}\times 0 & a_{21}\times 0 + a_{22}\times 0 + a_{23}\times 1 \\ a_{31}\times 1 + a_{32}\times 0 + a_{33}\times k & a_{31}\times 0 + a_{32}\times 1 + a_{33}\times 0 & a_{31}\times 0 + a_{32}\times 0 + a_{33}\times 1 \\ a_{41}\times 1 + a_{42}\times 0 + a_{43}\times k & a_{41}\times 0 + a_{42}\times 1 + a_{43}\times 0 & a_{41}\times 0 + a_{42}\times 0 + a_{43}\times 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} + ka_{43} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}$$

情况 4

以下所示的 3 个矩阵的秩相等。

- $m\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- 与 m 阶可逆矩阵进行积运算得到的 $m\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

- 与 n 阶可逆矩阵进行积运算得到的 $m\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$

解答

下表表示了将 2×4 矩阵$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}$进行转换，变成容易求出其秩的过程。

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}$$

在第 3 列加上“第 2 列的（−1）倍”。

↓

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

接着，在第 4 列加上“第 1 列的（−1）倍”。

↓

$$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

接着，在第 3 列加上“第 1 列的（−3）倍”。

↓

$$\begin{bmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&-3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}$$

接着，在第 4 列加上“第 2 列的（−2）倍”。

↓

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

因为$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&0&-3&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$均为可逆矩阵，所以 2×4 矩阵$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}$和 2×4 矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$的秩相等。因为在向量$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$中，线性无关的向量有 2 个$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，所以 2×4 矩阵$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$的秩是 2，2×4 矩阵$\begin{bmatrix}1&0&3&1\\0&1&1&2\end{bmatrix}$的秩也是 2。

✱ 6. 线性映射和矩阵的关系 ✱

在第 174 页我们已经叙述过了线性映射和矩阵的关系，即“如果映射 f 是从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的线性映射，那么 f 与 $m\times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ 意义相同”。其实这个解说对于读者来说，理解起来有点模糊。更确切点说的话，线性映射和矩阵的关系如下。

线性映射和矩阵的关系

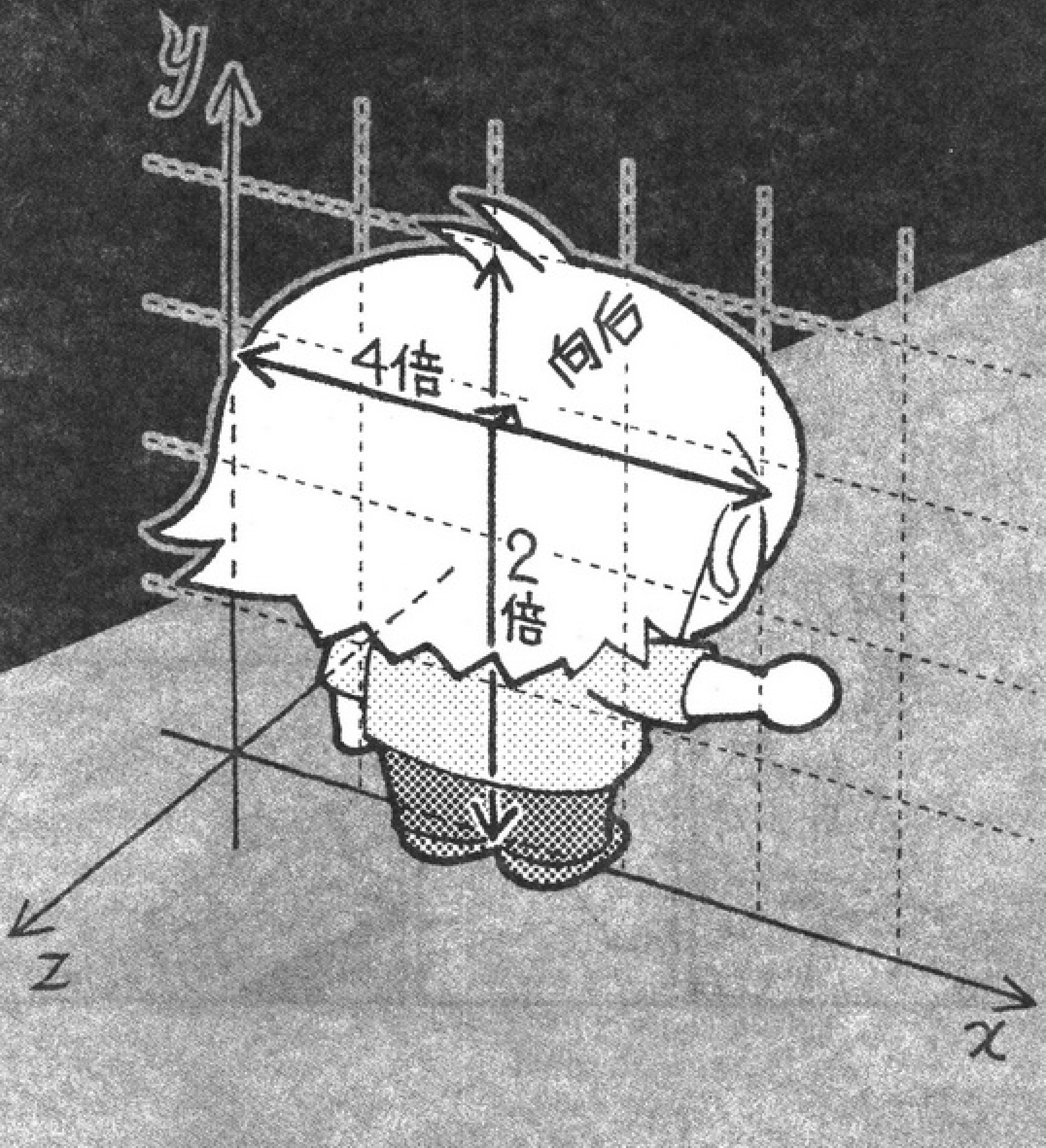
假设 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ 为 $\boldsymbol{R}^n$ 的任意元素。f 为从 $\boldsymbol{R}^n$ 到 $\boldsymbol{R}^m$ 的映射。

那么可以表示为

$$f \text{是从 } \boldsymbol{R}^n \text{ 到 } \boldsymbol{R}^m \text{ 的线性映射} \Leftrightarrow f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}。$$

第8章

特征值和特征向量




花道大学
百合野！
南凤大学
十文字！
准备！
スッ
ビクッ
看起来很有
实力。
スッ
我能取胜吗？
开始！



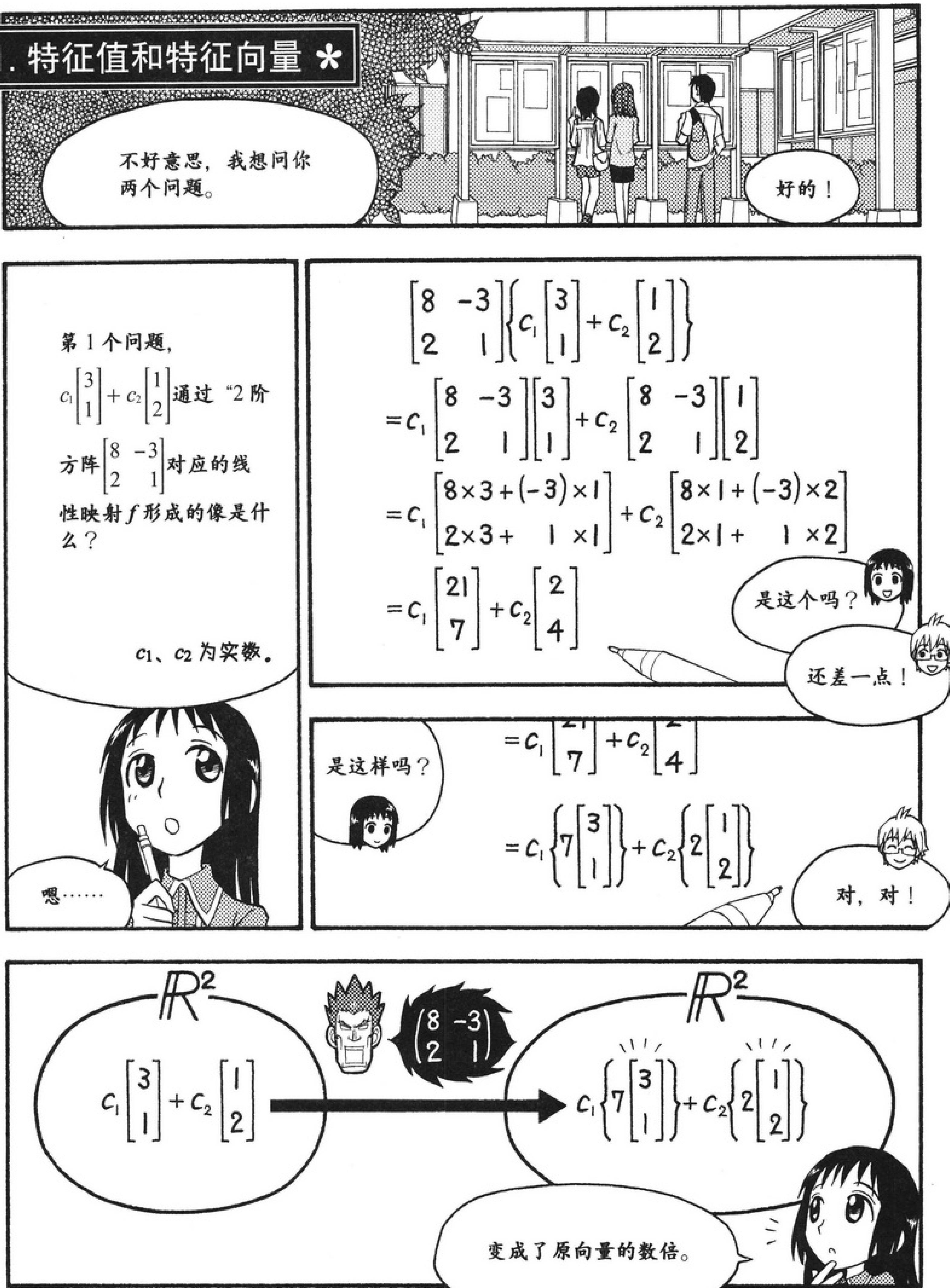
呀啊啊啊啊
哇……
该死！
怎么能输给你！
轮到我了！
呀啊啊啊啊
停！

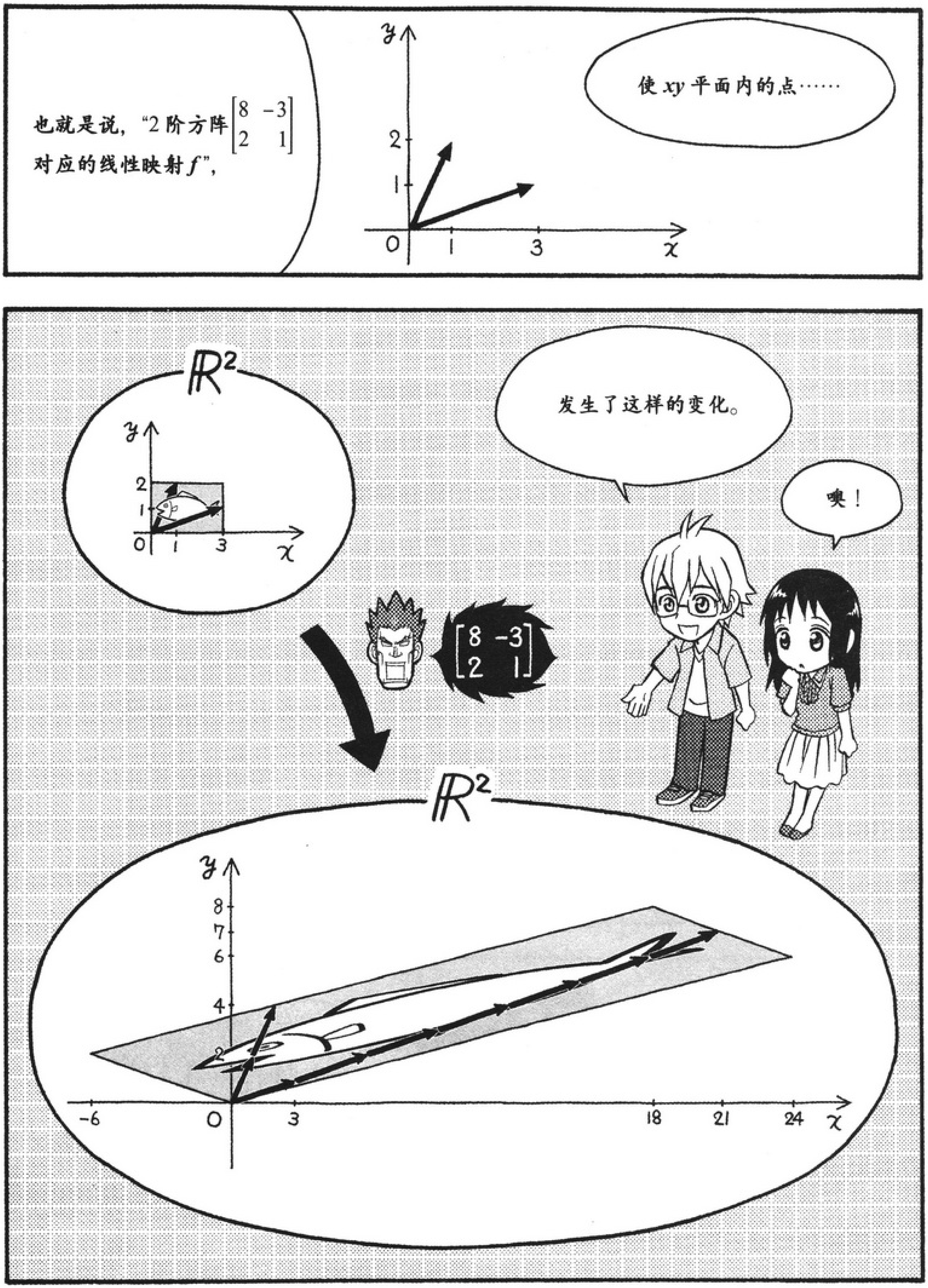

南风大胜！
非常感谢！
我输了！
你辛苦了！


比赛……
真是遗憾啊！
嗯……
哥哥说百合野
很善战。
他……
他那样说了吗？
你要打起
精神来！
还有下一次。
不是吗？
对，没错！
对不起，我这副无精
打采的样子，让你见
笑了！

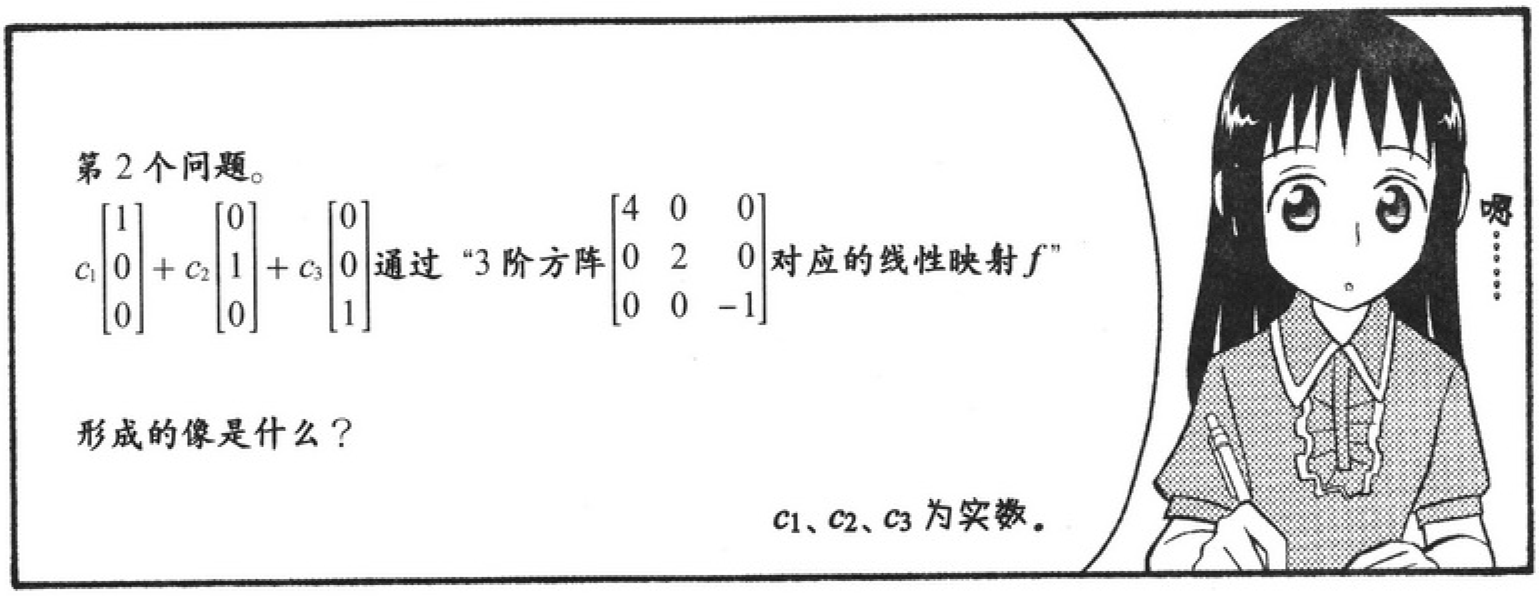

今天是最后一次课，
我们将学习特征值和特征向量。
这是另一个正题。
特征值和特征向量的知识在物理学和统计学中用处很大。
基础
基础知识
准备
矩阵
向量
线性映射
特征值和特征向量
同时，在求这个时也有用。
a11 a12 … a1n
a21 a22 … a2n
an1 an2 … ann
p
这是n阶方阵的p次幂吗？
我会尽量讲得通俗易懂一些。
那就拜托你了！

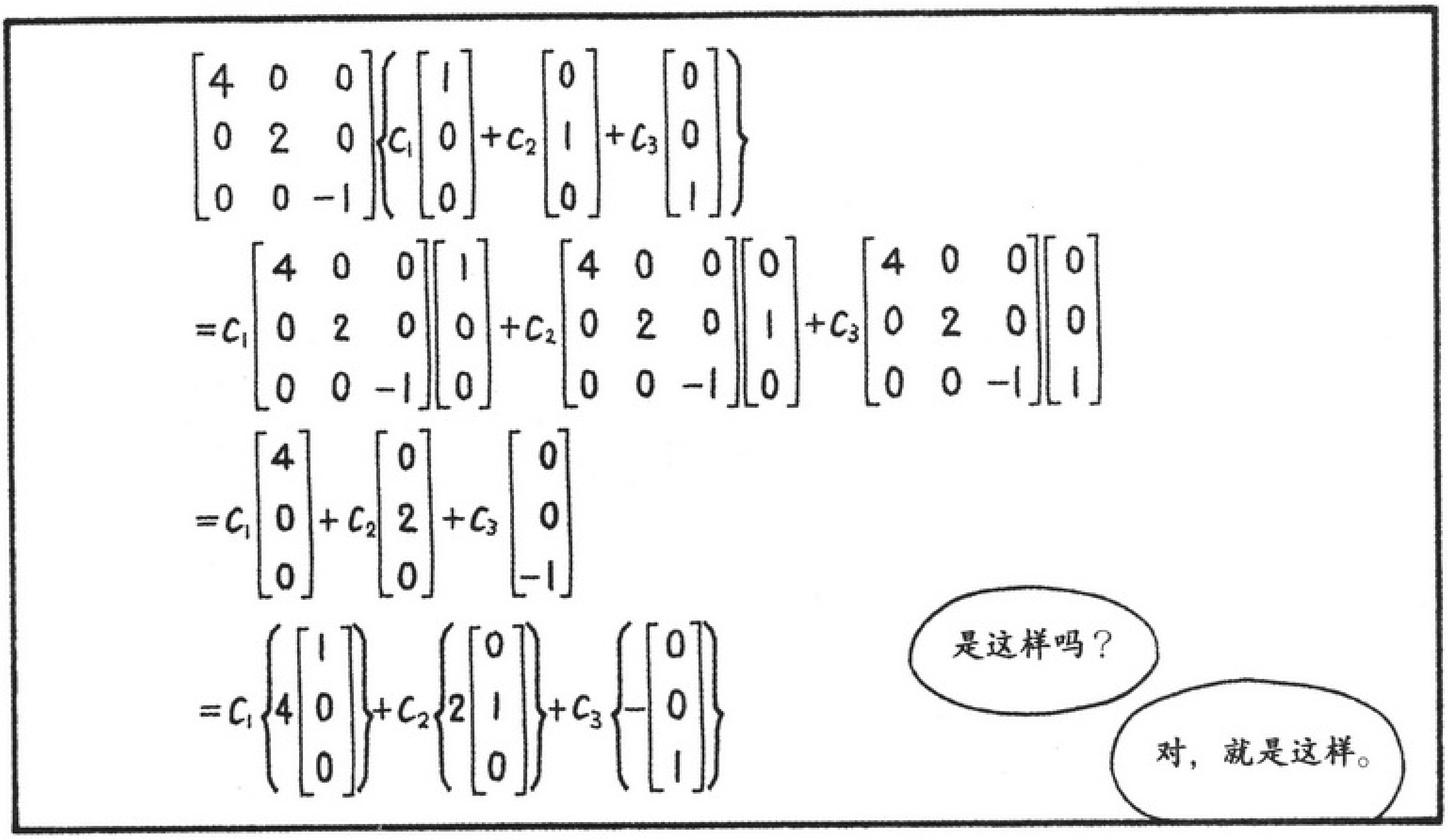
1. 特征值和特征向量 *

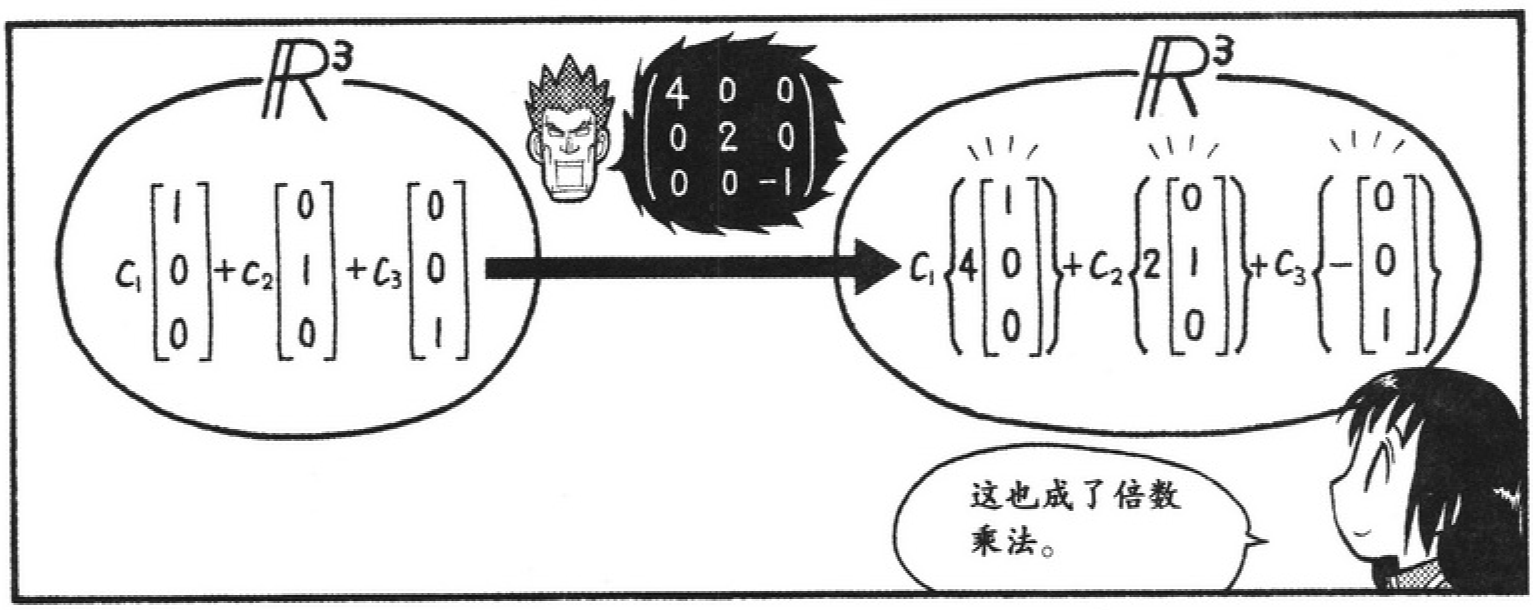

不好意思，我想问你两个问题。
好的！
第 1 个问题，
$c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$通过“2 阶方阵$\begin{bmatrix}8&-3\\2&1\end{bmatrix}$对应的线性映射$f$形成的像是什么？
c_1、c_2为实数。
嗯……
$\begin{bmatrix}8&-3\\2&1\end{bmatrix}\left\{c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
$=c_1\begin{bmatrix}8&-3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}8&-3\\2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
$=c_1\begin{bmatrix}8\times3+(-3)\times1\\2\times3+1\times1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}8\times1+(-3)\times2\\2\times1+1\times2\end{bmatrix}$
$=c_1\begin{bmatrix}21\\7\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$
是这个吗？
还差一点！
是这样吗？
$=c_1\begin{bmatrix}21\\7\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$
$=c_1\left\{7\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\}+c_2\left\{2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
对，对！
$\mathbb{R}^2$
$c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
$\begin{pmatrix}8&-3\\2&1\end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2$
$c_1\left\{7\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}\right\}+c_2\left\{2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right\}$
变成了原向量的数倍。

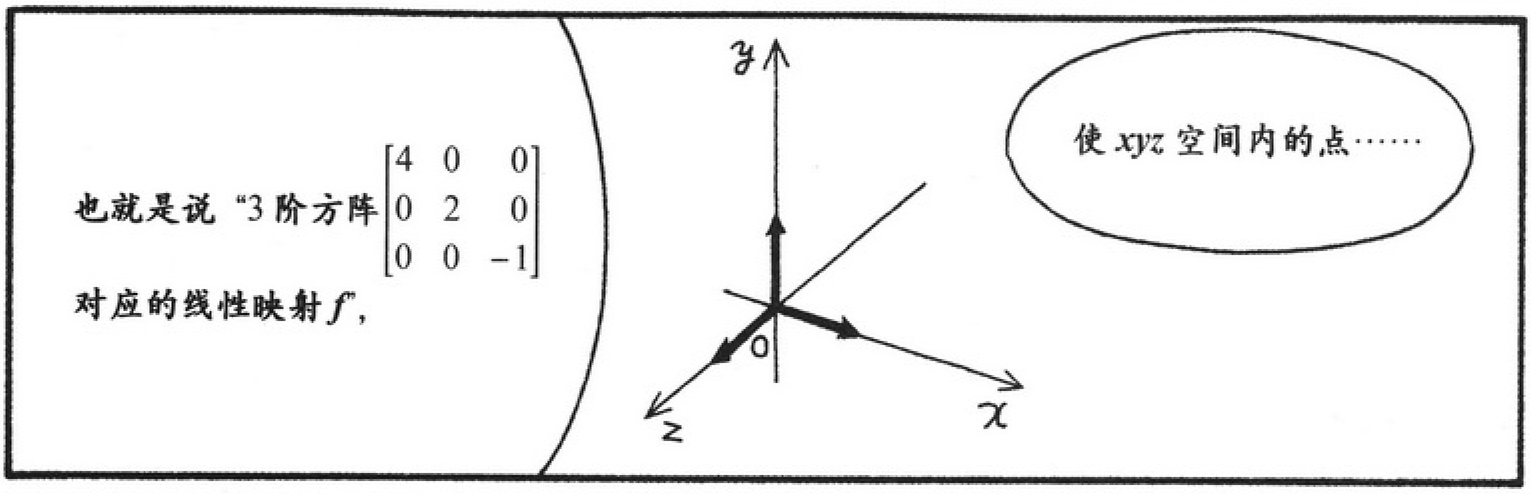


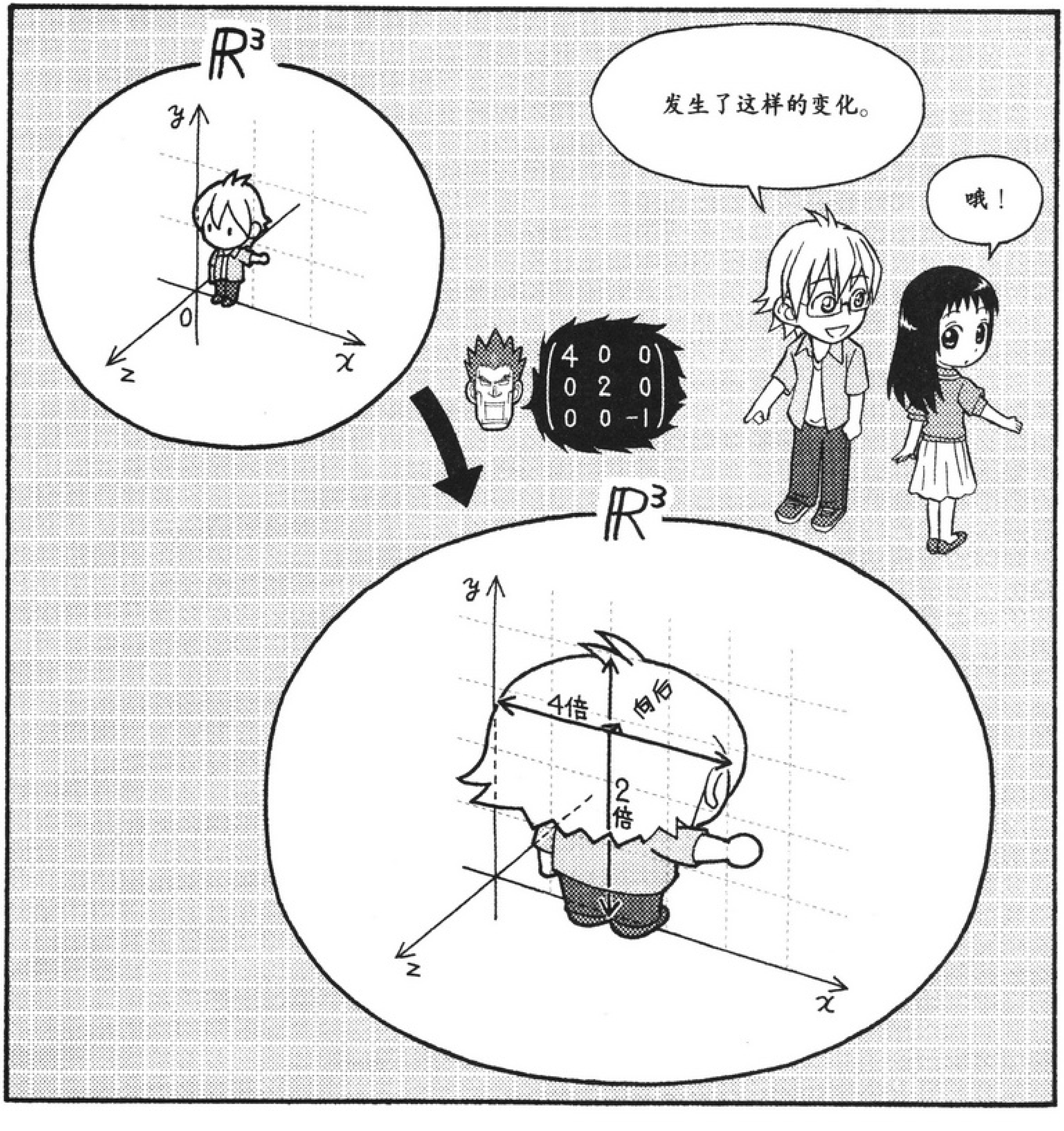
也就是说，“2 阶方阵 $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 对应的线性映射 f”，
使 xy 平面内的点……
发生了这样的变化。
噢！
$\mathbb{R}^2$
$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$
$\mathbb{R}^2$


第 2 个问题。
$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$通过“3 阶方阵$\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$对应的线性映射 f”
形成的像是什么？
c_1、c_2、c_3 为实数。
嗯……


$\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\left(c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$
$=c_1\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
$=c_1\begin{bmatrix}4\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$
$=c_1\left\{4\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}+c_2\left\{2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}+c_3\left\{-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$
是这样吗？
对，就是这样。


$\mathbb{R}^3$
$c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$
$\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^3$
$c_1\left\{4\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}+c_2\left\{2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}+c_3\left\{-\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$
这也成了倍数乘法。


也就是说"3阶方阵$\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}$
对应的线性映射f,
使xyz空间内的点……
y
0
z
x

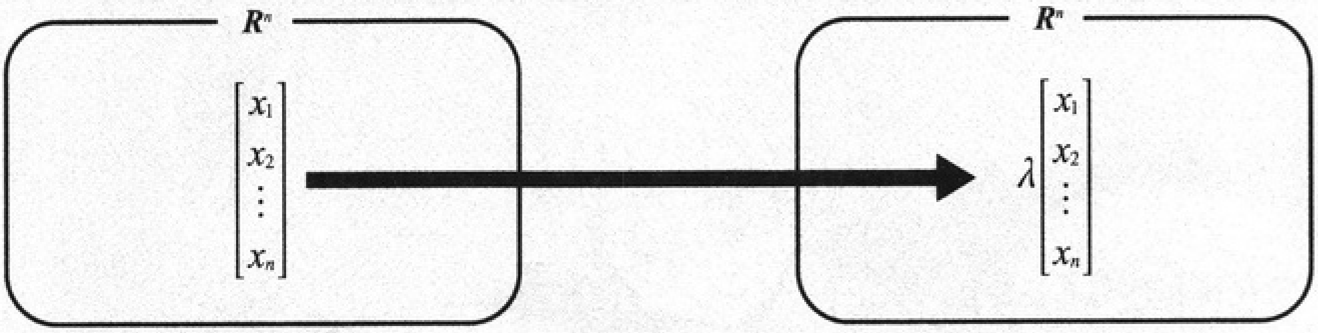

发生了这样的变化。
哦!
$\mathbb{R}^3$
y
0
z
x
4 0 0
0 2 0
0 0 -1
$\mathbb{R}^3$
y
4倍
向后
2倍
z
x



特征值和特征向量

当向量$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$通过“$n$阶方阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$对应的线性映射$f$”形成的像为$\lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$时，

我们把λ叫做“n阶方阵$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$的**特征值**”。把$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$叫做“与特征值$\lambda$对应的**特征向量**”。另外，零向量不能解释为特征向量。

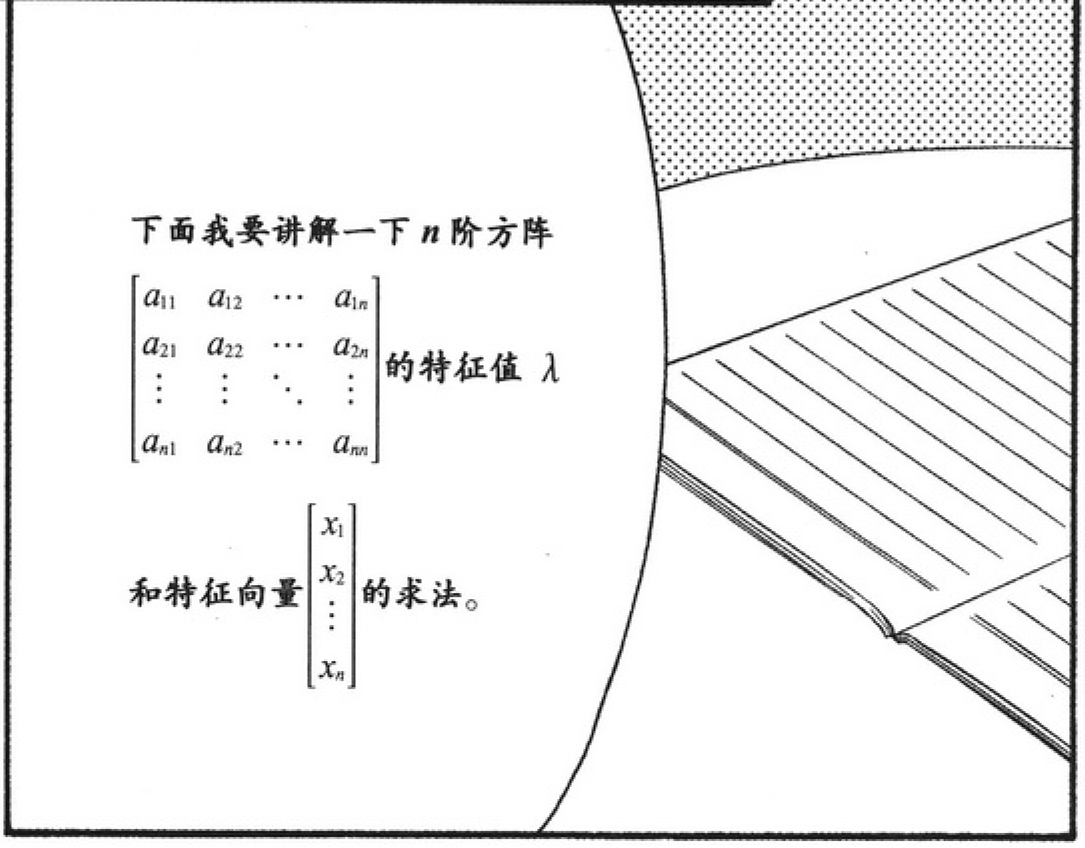




矩阵	$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
特征值	$\lambda = 7, 2$	$\lambda = 4, 2, -1$
特征向量	与$\lambda=7$对应的是$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ 与$\lambda=2$对应的是$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	与$\lambda=4$对应的是$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与$\lambda=2$对应的是$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 与$\lambda=-1$对应的是$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



✱ 2. 特征值和特征向量的求法 ✱

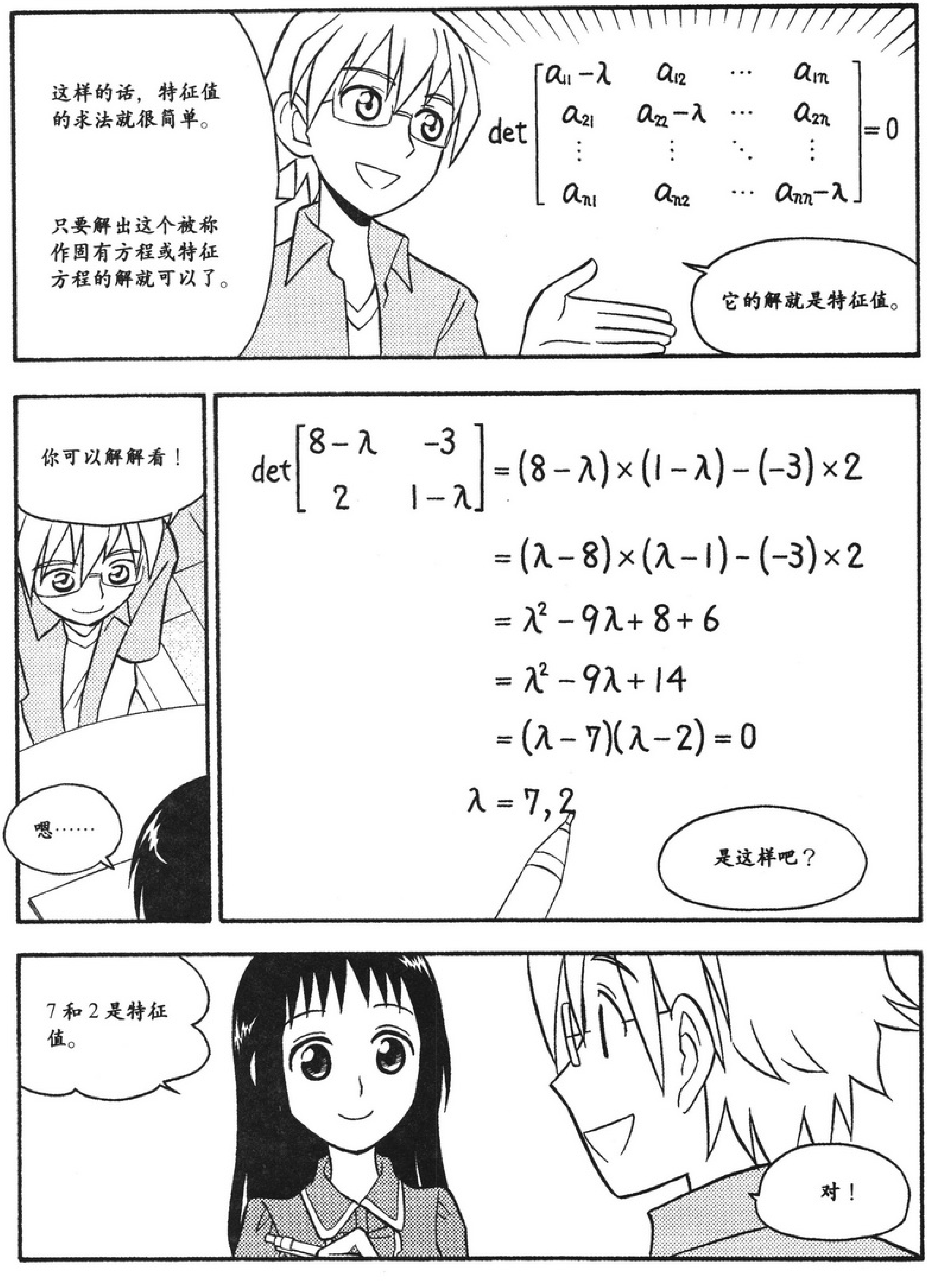






特征值和行列式的关系

$$\lambda \text{ 是 } n \text{ 阶方阵} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{的特征值} \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$


这样的话，特征值的求法就很简单。
只要解出这个被称作固有方程或特征方程的解就可以了。
$\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}=0$
它的解就是特征值。
你可以解解看！
嗯……
$\det\begin{bmatrix} 8-\lambda & -3 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}=(8-\lambda)\times(1-\lambda)-(-3)\times 2$
$=(\lambda-8)\times(\lambda-1)-(-3)\times 2$
$=\lambda^2-9\lambda+8+6$
$=\lambda^2-9\lambda+14$
$=(\lambda-7)(\lambda-2)=0$
$\lambda=7,2$
是这样吧？
7和2是特征值。
对！

特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$的求法也很简单。只要把刚才求出的特征值带入

$\begin{bmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$即$\begin{bmatrix}8-\lambda & -3\\2 & 1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$后再变换一下就可以了。



■ 与 $\lambda=7$ 对应的特征向量

将特征值代入后进行变换就成为

$$\begin{bmatrix}8-7 & -3\\2 & 1-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3\\2 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-3x_2\\2x_1-6x_2\end{bmatrix}=(x_1-3x_2)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

可以得出 $x_1=3x_2$。因此特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$就是

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3c_1\\c_1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$$

另外，c_1 为非零的任意实数。

■ 与 $\lambda=2$ 对应的特征向量

将特征值代入后进行变换就成为

$$\begin{bmatrix}8-2 & -3\\2 & 1-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6x_1-3x_2\\2x_1-x_2\end{bmatrix}=(2x_1-x_2)\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

可以得出 $x_2=2x_1$。因此特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$就是

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_2\\2c_2\end{bmatrix}=c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

另外，c_2 为非零的任意实数。



✱ 3. n 阶方阵 p 次幂的求法 ✱

今天我要讲解一下 n 阶方阵的 p 次幂的求法。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^p$$



$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 7 \\ 1\times 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 2 \\ 2\times 2 \end{bmatrix}$$

请看前一页。为了方便起见，我们假设 c_1 和 c_2 都为 1。

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 7 & 1\times 2 \\ 1\times 7 & 2\times 2 \end{bmatrix}$$

总结一下上面的两个式子。

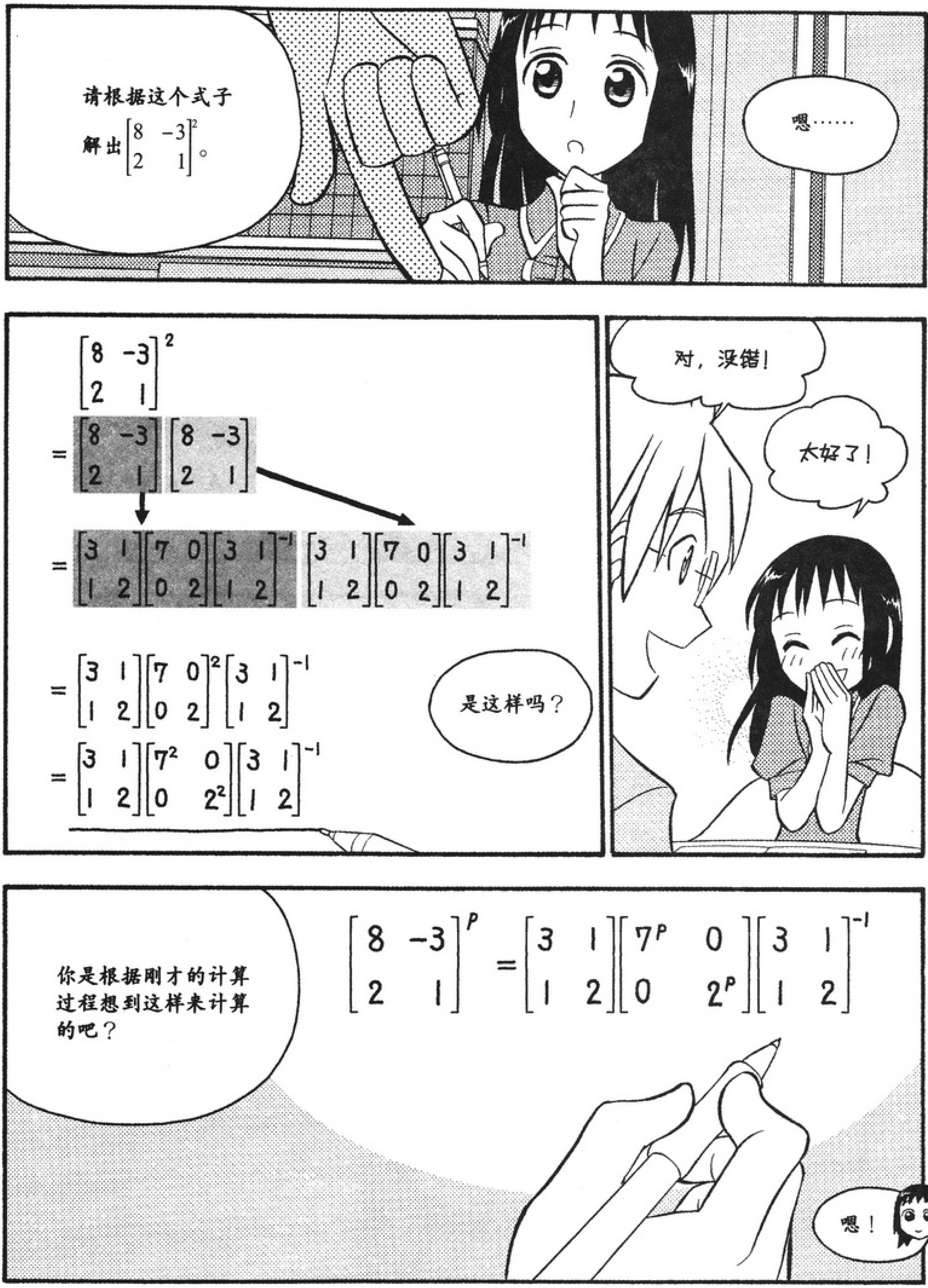
$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

在前面式子的等号两边都右乘 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$。
另外，关于 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$ 是否存在，已经在第 97 页做了证明。

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$




请根据这个式子解出$\begin{bmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}^2$。
嗯……
$\begin{bmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}^2$
$=\begin{bmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}$
$=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}$
$=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}$
$=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^2 & 0\\0 & 2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}$
是这样吗？
对，没错！
太好了！
你是根据刚才的计算过程想到这样来计算的吧？
$\begin{bmatrix}8 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}^p=\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7^p & 0\\0 & 2^p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}^{-1}$
嗯！


我们总结一下，n 阶方阵的 p 次幂就是这样！
与特征值 λ₁ 对应的特征向量。
$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^p = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$
与特征值 λ₂ 对应的特征向量。
原来如此！
与特征值 λn 对应的特征向量。
同时，
当 p=1 时，我们将上面的式子整理后得到下面的式子，
这样我们可以说“n 阶方阵 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 可对角化”。
你辛苦了！
$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$
注意在整理过的式子中，只有由特征值组成的对角矩阵位于等式的右边。
嗯！


我们的课到此就全部结束了。
怎么样？你掌握了线性代数的要领了吧？
嗯，多亏了你啊，百合野！
那太好了！
你平时练习那么累，还要给我上课……
真的太感谢你了！
不……不客气，你不是也经常做便当给我吃吗？还经常鼓励我，我很开心！
谢谢你！
呵呵，课上完了，突然觉得有点无聊了呢……


那下次我们一起出去玩吧？
真的？
那个，我们去买关于线性代数的习题集……
怎……怎么样？
好，我非常愿意，
我很期待着那天的到来。

✱ 4. 是否存在重解与对角化 ✱

在第 229 页中我们似乎曾提过“无论什么样的 n 阶方阵都可以表示成这样吗”。

与特征值 λ₁ 对应的特征向量

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

与特征值 λ₂ 对应的特征向量

与特征值 λₙ 对应的特征向量

但是，在实际计算中，可没有那么简单。

是否可以表示成上式那样还与 $\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}=0$ 是否有重解有关。

当它不存在重解时，就可以表示成那样。当它存在重解时，就不一定能表示成那样。

我在前面一节已经介绍过了不存在重解时的例子。那么在本节，我将要介绍一下：

- 存在重解时可以表示成那样的例子；
- 存在重解时不可以表示成那样的例子。

4.1 存在重解时的示例1

问题

我们将以 3 阶方阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$为例进行解说。

（1）请求出它的特征值和特征向量。

（2）请以$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}^{-1}$的形式来表示。

解答

（1）假设 λ 为 3 阶方阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$的特征值。

因为 λ 是特征方程式$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}=0$ 的解，所以就可以得到如下结果。

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 0\times(-1)\times(-2) + 0\times1\times0 \\ &\quad -0\times(1-\lambda)\times(-2) - 0\times1\times(3-\lambda) - (1-\lambda)\times(-1)\times0 \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0 \end{aligned}$$

$$\lambda = 3,1$$

■ 与 λ=3 对应的特征向量

把特征值代入$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$中变换一下，即代入$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$中变化一下，可以得到

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & 0 \\ 1 & 1-3 & -1 \\ -2 & 0 & 3-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \\ -2x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可以得知$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$。因此，特征向量$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$就为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ -2c_1 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

另外，c_1 为非零的任意实数。

■ **与 λ=1 对应的特征向量**

同样，把特征值代入变换一下，可以得到

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-1 & -1 \\ -2 & 0 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 - x_3 \\ -2x_1 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可以得知 $x_3=x_1$。因此，特征向量$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$就为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ c_2 \end{bmatrix} = c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

另外，c_2，c_3 为非零的任意实数。

（2）与第 229 页的思路一样，可以得到

与特征值 3 相对应的特征向量

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

与特征值 1 相对应的特征向量

4.2 存在重解时的示例2

问题

我们将以 3 阶方阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$为例进行解说。

（1）请求出它的特征值和特征向量。

（2）请以$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}^{-1}$的形式来表示。

解答

（1）假设λ为 3 阶方阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$的特征值。

因为λ是特征方程式$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}=0$的解，所以就可以得到如下结果。

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -7 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda) + 0\times(-1)\times 4 + 0\times(-7)\times 0 \\
&\quad -0\times(1-\lambda)\times 4 - 0\times(-7)\times(3-\lambda) - (1-\lambda)\times(-1)\times 0 \\
&= (1-\lambda)^2(3-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

$$\lambda = 3,1$$

■ 与 λ=3 对应的特征向量

把特征值代入$\begin{bmatrix}1&0&0\\-7&1&-1\\4&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$中变换一下，即代入$\begin{bmatrix}1-\lambda&0&0\\-7&1-\lambda&-1\\4&0&3-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$中变化一下，可以得到

$$\begin{bmatrix}1-3&0&0\\-7&1-3&-1\\4&0&3-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\-7&-2&-1\\4&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2x_1\\-7x_1-2x_2-x_3\\4x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

由此可以得知$\begin{cases}x_1=0\\x_3=-2x_2\end{cases}$。因此，特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$就为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\c_1\\-2c_1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}$$

另外，c_1 为非零的任意实数。

■ 与 λ=1 对应的特征向量

同样，把特征值代入变换一下，可以得到

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ -7 & 1-1 & -1 \\ 4 & 0 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7x_1 - \ x_3 \\ 4x_1 + 2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由此可以得知$\begin{cases} x_3 = -7x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}$。只有当 x_1=x_3=0 时，$\begin{cases} x_3 = -7x_1 \\ x_3 = -2x_1 \end{cases}$才成立。因此特征向量$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$就为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{bmatrix} = c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

另外，c_2，c_3 为非零的任意实数。

（2）与 λ=1 对应的特征向量并不能变换为$c_2\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = c_3\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix}$这种形式。

因此，矩阵$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$不能以$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}^{-1}$的形式表示出来。


我到得太早了！
百合野……
在等人？
ポンー
刚才的声音是……
ドキッ
啊……
只是叫你陪我们喝喝茶……
好了……
你们干什么？放开我！
美纱！


我必须去救她！
快点去！
从那群家伙手里救出她！
!
ガタ
ガタ
但是……
要是又像以前那样的话……
那天，我和后藤约好一起回家，我一直很喜欢后藤……
放开我！
咱们交个朋友吧！
我有约会！
后藤！



她正被一群不良少年纠缠着！
我必须救她！
喂，放开她！
啊？这个家伙是谁啊？
咔！
啊！？
ドサッ
太弱了！
喂，你真是不堪一击啊！
喂，走吧！
放手，放手！
喂！


还不住手？欺负女孩子算什么本事？
这次又是谁？
哇！
你，你是……
是那个被称为“花道大学空手道部传奇人物”的……
一之濑战太郎！
正是我！
花道大的
一之濑……
你们还要和我较量较量吗？
快逃！
谢谢你！
不客气，还是好好照顾他吧！
ぐっ…


我……
希望对方可以保护我！
……
你有心救我，我感到很高兴，不过……
百合野，你太弱不经风了！
我没能救你，对不起！
我要变得强壮有力！
虽然现在还……
不太厉害，但是……
这次我一定要救出她！
你们给我放开她！！
快来人啊！
呀啊！



啊？
快，你快走！
百合野！
等等！喂！
关你什么事！给我滚到一边去！
！
不准碰美纱！
你很酷嘛！
给我狠狠地揍他！


你这小子！
啊！！
快跑！
百合野！
住手！
求你们了！
岂有此理！
还真能挺得住！
放开这家伙！

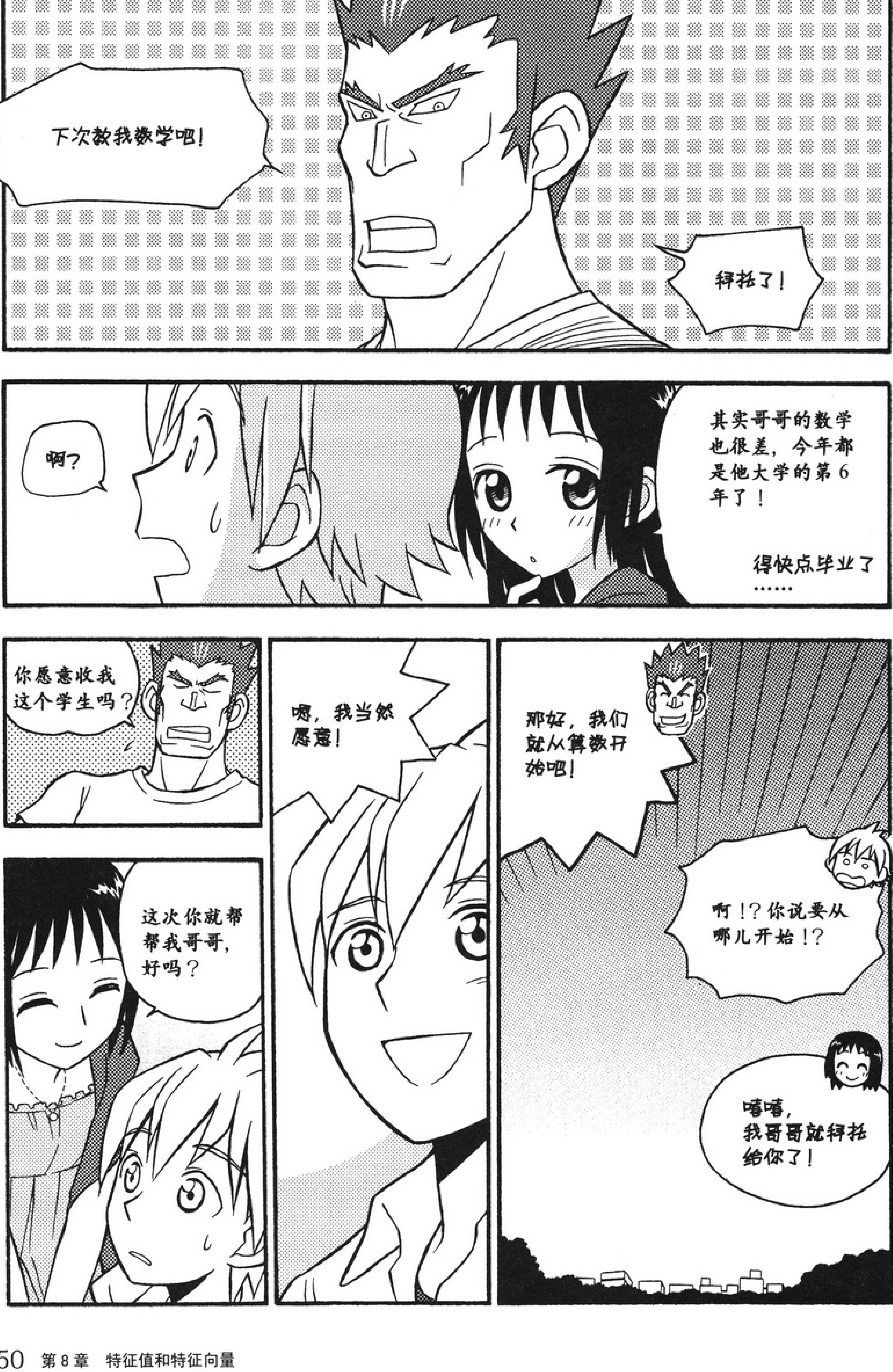

你们竟敢欺负我妹妹……
哥哥……
我本来不喜欢随便打架的，但是这次关系到美纱，那我就不客气了！
是一之濑！
那个花道大的“传奇人物”！
一之濑主将!?
不妙！
快逃！
百合野!


百合野……
百合野……
百合野!
太好了！
哇，哇！
百合野！美纱把详细情况都告诉我了，
非常感谢！
主将！
你不用感谢我！


我不但没有帮到美纱，还被那些家伙给打倒了……
我永远都是这么弱小……
你的腕力确实不够强，
不过，你绝不弱小！
你不顾自己的安危，勇敢地和那些坏人斗争，
有这种勇气的人才是真正的强者！
你很有胆量！
但是……
百合野！
就像哥哥说的那样，
百合野能够为我如此拼命，我非常高兴！
美纱……



谢谢你！
咦？
什么!?
我一开始就应该警告过你的，怎么……
ギリギリ
啊!?那个，那个……
嗯……
美纱已经长大了，我也没办法管她啦！
主将……
不过，百合野，我有事想找你帮忙，
好，好的！


下次教我数学吧！
拜托了！
啊？
其实哥哥的数学也很差，今年都是他大学的第6年了！
得快点毕业了……
你愿意收我这个学生吗？
这次你就帮帮我哥哥，好吗？
嗯，我当然愿意！
那好，我们就从算数开始吧！
啊！？你说要从哪儿开始！？
嘻嘻，我哥哥就拜托给你了！

附录1

习题

本书有4个附录。

◆ 附录1　习　题

◆ 附录2　内　积

◆ 附录3　外　积

◆ 附录4　行列式的性质

附录2～4的内容在北京东方科龙图文有限公司的网站 http://okbook.com.cn/ 内关于本书的介绍页中有说明，请下载后使用。

问题

1 我们来考虑一下有关 2 阶方阵$\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}$的相关问题

（1）请求出行列式的值。

（2）请利用$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\-a_{21} & a_{11}\end{bmatrix}$这个公式求它的逆矩阵。

（3）请用消元法求出它的逆矩阵。

（4）请求出它的特征值和特征向量。

（5）请用$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}^{-1}$这种形式来表示它。

（6）请用克莱姆法则求一次方程组$\begin{cases}4x_1-1x_2=1\\5x_1-2x_2=-1\end{cases}$的解。

2 我们来思考一下有关 3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\\3 & -2 & -1\end{bmatrix}$的相关问题

（1）请证明它的秩是否是 3，即向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$是否线性无关。

（2）请求出行列式的值。

3 **请分别判断以下的集合是否是 R^3 的子空间。**

（1）$\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\beta\end{bmatrix}\middle|\ \alpha\text{和}\beta\text{为任意实数}\right\}$

（2）$\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\end{bmatrix}\middle|\ \alpha\text{和}\beta\text{为任意实数}\right\}$

4 **我们来思考一下有关向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的相关问题。**

（1）请求出向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的长度。

（2）请求出向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的内积，即$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的值。

（3）请求出向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的夹角。

（4）请求出向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的外积，即$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的值。

4 **请在学习完附录 2 和附录 3 后再挑战第 4 题。**

解答

1

（1）$\det\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix} = 4\times(-2)-(-1)\times5 = -8+5 = -3$

（2）$\dfrac{1}{4\times(-2)-(-1)\times5}\begin{bmatrix}-2 & 1\\-5 & 4\end{bmatrix} = \dfrac{1}{-3}\begin{bmatrix}-2 & 1\\-5 & 4\end{bmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1\\5 & -4\end{bmatrix}$

（3）如下表

$\begin{bmatrix}4 & -1 & 1 & 0\\5 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 把第 1 行乘以 2 后，减去第 2 行。
$\begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & -1\\5 & -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 然后，把第 1 行乘以 5，把第 2 行乘以 3，用第 2 行减去第 1 行。
$\begin{bmatrix}15 & 0 & 10 & -5\\0 & -6 & -10 & 8\end{bmatrix}$ 接着，把第 1 行除以 15，第 2 行除以（-6）。
$\begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\0 & 1 & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3}\end{bmatrix}$

（4）设 λ 为 2 阶方阵 $\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}$ 的特征值。那么 λ 是特征方程式 $\det\begin{bmatrix}4-\lambda & -1\\5 & -2-\lambda\end{bmatrix} = 0$ 的解，所以就能够得到下页的结果。

$$\det\begin{bmatrix}4-\lambda & -1\\ 5 & -2-\lambda\end{bmatrix} = (4-\lambda)\times(-2-\lambda)-(-1)\times 5$$
$$= (\lambda-4)(\lambda+2)+5$$
$$= \lambda^2-2\lambda-3$$
$$= (\lambda-3)(\lambda+1)=0$$
$$\lambda = 3,-1$$

■与 λ=3 对应的特征向量

把特征值代入$\begin{bmatrix}4 & -1\\ 5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$中变换一下，即代入$\begin{bmatrix}4-\lambda & -1\\ 5 & -2-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$变换一下，可以得到

$$\begin{bmatrix}4-3 & -1\\ 5 & -2-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 5 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1-x_2\\ 5x_1-5x_2\end{bmatrix}=(x_1-x_2)\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

由此可知 $x_1=x_2$。因此，特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\\ c_1\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

另外，c_1 为非零的任意实数。

■与 λ=−1 对应的特征向量

同样把特征值代入变换一下，得到

$$\begin{bmatrix}4-(-1) & -1\\ 5 & -2-(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5x_1-x_2\\ 5x_1-x_2\end{bmatrix}=(5x_1-x_2)\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

由此可知 $x_2=5x_1$。因此特征向量$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$为

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_2\\ 5c_2\end{bmatrix}=c_2\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}$$

另外，c_2 为非零的任意实数。

（5）由（4）可知

$$\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}^{-1}$$

（6）一次方程组$\begin{cases}4x_1-1x_2=1\\5x_1-2x_2=-1\end{cases}$可以变换成$\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$。根据$\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$和（1），可以得到如下的解。

$$\bullet\ x_1=\frac{\det\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & -2\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}}=\frac{1\times(-2)-(-1)\times(-1)}{-3}=\frac{-3}{-3}=1$$

$$\bullet\ x_2=\frac{\det\begin{bmatrix}4 & 1\\5 & -1\end{bmatrix}}{\det\begin{bmatrix}4 & -1\\5 & -2\end{bmatrix}}=\frac{4\times(-1)-1\times5}{-3}=\frac{-9}{-3}=3$$

2

（1）下表表明了将 3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\\3 & -2 & -1\end{bmatrix}$变换成易于求其秩的过程。

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\\3 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

在第 2 行中加上“第 1 行的（–2 倍）”，在第 3 行加上“第 1 行的（–3）倍”。

⬇

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\-3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\\3 & -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\0 & -7 & 4\\0 & -14 & 2\end{bmatrix}$$

接着，在第 3 行加上“第 2 行的（–2）倍”。

⬇

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\0 & -7 & 4\\0 & -14 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\0 & -7 & 4\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

接着，在第 1 行加上“第 3 行的（$-\dfrac{1}{6}$）倍”，在第 2 行中加上“第 3 行的$\dfrac{4}{6}$倍”。

⬇

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -\dfrac{1}{6}\\0 & 1 & \dfrac{4}{6}\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\0 & -7 & 4\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\0 & -7 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

在第 1 行加上“第 2 行的$\dfrac{4}{7}$倍”。

⬇

$$\begin{bmatrix}1 & \dfrac{4}{7} & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 0\\0 & -7 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -7 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}$$

根据 204 页到 209 页的内容，可以知道 3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\\3 & -2 & -1\end{bmatrix}$和 3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -7 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}$的秩相等。在向量$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\-7\\0\end{bmatrix}$、向量$\begin{bmatrix}0\\0\\-6\end{bmatrix}$中，线性无关向量的个数很显然是 3，所以 3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -7 & 0\\0 & 0 & -6\end{bmatrix}$的秩是 3，3 阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\\3 & -2 & -1\end{bmatrix}$的秩也是 3。

（2）$\det\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\2 & 1 & 2\\3 & -2 & -1\end{bmatrix}$

$=1\times 1\times(-1)+4\times 2\times 3+(-1)\times 2\times(-2)-(-1)\times 1\times 3-4\times 2\times(-1)-1\times 2\times(-2)$

$=-1+24+4+3+8+4=42$

c 为任意实数。

（1）是子空间。因为它像

$$① \ c\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ 5\alpha_1-7\beta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\alpha_1\\ c\beta_1\\ 5(c\alpha_1)-7(c\beta_1)\end{bmatrix}\in\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\beta\end{bmatrix}\middle|\ \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 为任意实数}\right\}$$

$$② \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ 5\alpha_1-7\beta_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ 5\alpha_2-7\beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 5(\alpha_1+\alpha_2)-7(\beta_1+\beta_2)\end{bmatrix}\in\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\beta\end{bmatrix}\middle|\ \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 为任意实数}\right\}$$

那样，满足是子空间的两个条件。

（2）不是子空间。因为它像

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\\ 5\alpha_1-7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\alpha_2\\ \beta_2\\ 5\alpha_2-7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 5(\alpha_1+\alpha_2)-14\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}\alpha_1+\alpha_2\\ \beta_1+\beta_2\\ 5(\alpha_1+\alpha_2)-7\end{bmatrix}\in\left\{\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ 5\alpha-7\end{bmatrix}\middle|\ \alpha \text{ 和 } \beta \text{ 为任意实数}\right\}$$

那样，不满足是子空间的条件中的至少 1 个条件[1]。

1. 向量空间的某个子集是子空间必须满足第 157 页中所述的两个条件。也就是说，只要不满足其中的一个条件，就可以说该子集不是子空间。

4

（1）$\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{1^2+2^2+3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\left\|\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\| = \sqrt{4^2+1^2+(-2)^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

（2）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix} = 1\times4+2\times1+3\times(-2) = 4+2-6 = 0$

（3）因为向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$和向量$\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}$的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right\|\times\left\|\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix}\right\|} = \frac{0}{\sqrt{14}\times\sqrt{21}} = 0$$

所以 θ=90°。

（4）$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\times(-2)-1\times3\\3\times4-(-2)\times1\\1\times1-4\times2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4-3\\12+2\\1-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7\\14\\-7\end{bmatrix} = 7\begin{bmatrix}-1\\2\\-1\end{bmatrix}$

◆ 参考文献 ◆

- 新井仁之『線形代数–基礎と応用』（日本評論社）2006
- 伊藤正之/鈴木紀明『数学基礎　線形代数』（培風館）1998
- 上坂吉則/塚田真『入門線形代数（三訂版）』（近代科学社）1987
- 押川元重/阪口紘治『基礎　線形代数』（培風館）1991
- 小松勇作編『高等学校　数学Ⅰ【再訂版】』（旺文社）1987
- 齋藤正彦『線型代数入門』（東京大学出版会）1966
- 齋藤正彦『線型代数演習』（東京大学出版会）1985
- 高橋大輔『理工基礎　線形代数』（サイエンス社）2000
- 長沼伸一郎『物理数学の直観的方法』（通商産業研究社）1987
- 平岡和幸/堀玄『プログラミングのための線形代数』（オーム社）2004
- G.Birkhoff/S.MacLane（奥川光太郎/辻吉雄訳）『現代代数学概論　改訂新版』（白水社）1961
- 『岩波　情報科学辞典』（岩波書店）1990
- 『岩波　数学辞典　第2版』（岩波書店）1968

- 小杉肇『数学史（幾何と空間）』（槇書店）1974
- 小堀憲『数学史』（朝倉書店）1956
- 武隈良一『数学史』（培風館）1959
- 仲田紀夫『マンガ　おはなし数学史』（講談社）2000
- 野矢茂樹『論理学』（東京大学出版会）1994
- J.Derbyshire（松浦俊輔訳）『代数に惹かれた数学者たち』（日経BP社）2008

- 田村秀行編『コンピュータ画像処理』（オーム社）2002
- 安田仁彦『CADとCAE』（コロナ社）1997
- 山口富士夫『CAD工学』（培風館）1998
- http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Matrices_and_determinants.html
- http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Abstract_linear_spaces.html


看不明白……
静下心来，
慢慢来！
哥哥，
加油！

（N-0350.0104）

责任编辑：张丽娜　赵丽艳

责任制作：董立颖　魏　谨

封面制作：【铭轩堂设计：13671110894 铭志辉满 轩雅静氣】

用漫画这种形式讲数学、物理和统计学，十分有利于在广大青少年中普及科学知识。

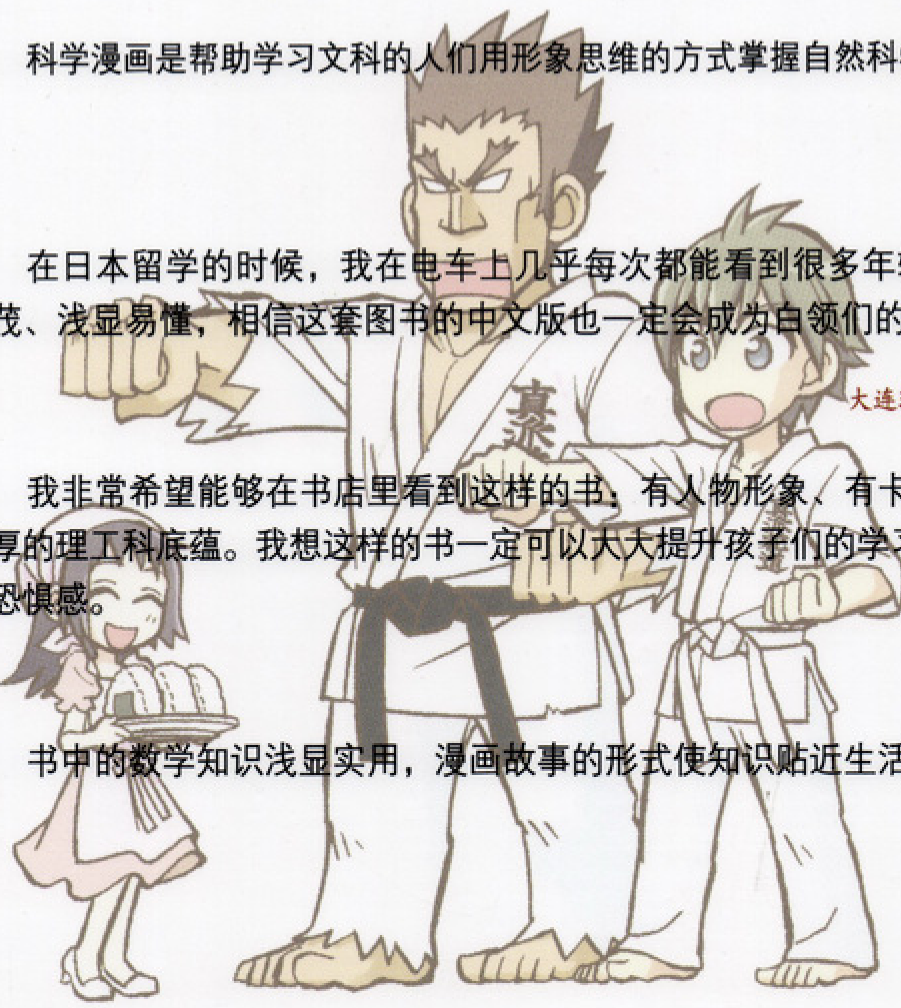
周恩来、邓颖超秘书，周恩来邓颖超纪念馆顾问
中日友好协会理事，《数理天地》顾问，全国政协原副秘书长

用漫画和说故事的形式讲数学，使面貌冷峻的数学变得亲切、生动、有趣，使学习数学变得容易，这对于提高全民的数学水平无疑是功德无量的事。

《数理天地》杂志社　社长 总编
"希望杯"全国数学邀请赛组委会 命题委员会主任　周国镇

用漫画的形式，讲解日常生活中的数学、物理知识，更能让大家感受到数学殿堂的奥妙与乐趣。

《光明日报》 原副总编辑
中华炎黄文化研究会 常务副会长　鲁谆



科学漫画是帮助学习文科的人们用形象思维的方式掌握自然科学的金钥匙。

中国人民大学外语学院日语专业 主任
大学日语教学研究会 会长　成同社

在日本留学的时候，我在电车上几乎每次都能看到很多年轻的白领看这套图书，经济实惠、图文并茂、浅显易懂，相信这套图书的中文版也一定会成为白领们的手中爱物。

大连理工大学 能源与动力学院 博士 副教授

我非常希望能够在书店里看到这样的书：有人物形象、有卡通图、有故事情节，当然最重要的还有深厚的理工科底蕴。我想这样的书一定可以大大提升孩子们的学习兴趣，降低他们对于高深的理工科知识的恐惧感。

北京启明星培训学校 校长

书中的数学知识浅显实用，漫画故事的形式使知识贴近生活，概念更容易理解。

北京大学 数学科学学院 博士　张磊

上架建议：科普/漫画

ISBN 978-7-03-024797-1

9 787030 247971 >

科学出版社 东方科龙

http://www.okbook.com.cn
zhaoliyan@mail.sciencep.com

定价：32 .00元